FISIKA DASAR

MIRZA SATRIAWAN

November 6, 2007

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Besaran dan Pengukuran

Fisika adalah ilmu yang mempelajari benda-benda serta fenomena dan keadaan yang terkait dengan benda-benda tersebut. Untuk menggambarkan suatu fenomena yang terjadi atau dialami suatu benda, maka didefinisikan berbagai besaran-besaran fisika. Besaran-besaran fisika ini misalnya panjang, jarak, massa, waktu, gaya, kecepatan, temperatur, intensitas cahaya, dan sebagainya. Terkadang nama dari besaran-besaran fisika tadi memiliki kesamaan dengan istilah yang dipakai dalam keseharian, tetapi perlu diperhatikan bahwa besaran-besaran fisika tersebut tidak selalu memiliki pengertian yang sama dengan istilah-istilah keseharian. Seperti misalnya istilah gaya, usaha, dan momentum, yang memiliki makna yang berbeda dalam keseharian atau dalam bahasa-bahasa sastra. Misalnya, "Anak itu bergaya di depan kaca", "Ia berusaha keras menyelesaikan soal ujiannya", "Momentum perubahan politik sangat tergantung pada kondisi ekonomi negara". Besara-besaran fisika didefinisikan secara khas, sebagai suatu istilah fisika yang memiliki makna tertentu. Terkadang besaran fisika tersebut hanya dapat dimengerti dengan menggunakan bahasa matematik, terkadang dapat diuraikan dengan bahasa sederhana, tetapi selalu terkait dengan pengukuran (baik langsung maupun tidak langsung). Semua besaran fisika harus dapat diukur, atau dikuatifikasikan dalam angka-angka. Sesuatu yang tidak dapat dinyatakan dalam angka-angka bukanlah besaran fisika, dan tidak akan dapat diukur.

Mengukur adalah membandingakan antara dua hal, biasanya salah satunya adalah suatu standar yang menjadi alat ukur. Ketika kita mengukur jarak antara dua titik, kita membandingkan jarak dua titik tersebut dengan jarak suatu standar panjang, misalnya panjang tongkat meteran. Ketika kita mengukur berat suatu benda, kita membandingkan berat benda tadi dengan berat benda standar. Jadi dalam mengukur kita membutuhkan standar sebagai pembanding besar sesuatu yang akan diukur. Standar tadi kemudian biasanya dinyatakan memiliki nilai satu dan dijadian sebagai acuan satuan tertentu. Walau kita dapat sekehendak kita menentukan standar ukur, tetapi tidak ada artinya bila tidak sama di seluruh dunia, karena itu perlu diadakan suatu standar internasional. Selain itu standar tersebut haruslah praktis dan mudah diproduksi ulang di manapun di dunia ini. sistem standar internasional ini sudah ada, dan sekarang dikenal dengan Sistem Internasional (SI).

Terkait dengan SI, terdapat satuan SI.

Antara besaran fisika yang satu dengan besaran fisika yang lain, mungkin terdapat hubungan. Hubungan-hubungan antara besaran fisika ini dapat dinyatakan sebagai persamaan-persamaan fisika, ketika besaran-besaran tadi dilambangkan dalam simbol-simbol fisika, untuk meringkas penampilan ersamaannya. Karena besaran-besaran fisika tersebut mungkin saling terkait, maka tentu ada sejumlah besaran yang mendasari semua besaran fisika yang ada, yaitu semua besaran-besaran fisika dapat dinyatakan dalam sejumlah tertentu besaran-besaran fisika, yang disebut sebagai besaran-besaran dasar. Terdapat tujuh buah besaran dasar fisika (dengan satuannya masing-masing)

1. panjang (meter)
2. massa (kilogram)
3. waktu (sekon)
4. arus listrik (ampere)
5. temperatur (kelvin)
6. jumlah zat (mole)
7. intensitas cahaya (candela)

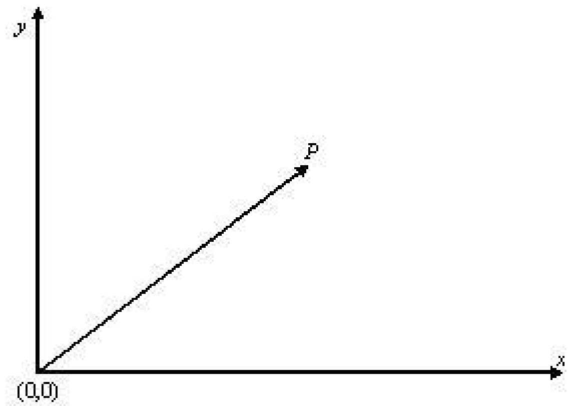
Satuan SI untuk panjang adalah meter dan satu meter didefinisikan sebagai 1650763,73 kali panjang gelombang cahaya transisi $2p_{10}$ - $5d_5$ isotop Kr^{86}. Satuan SI untuk waktu adalah sekon dan satu sekon didefinisikan sebagai 9

192 631 770 kali periode transisi tertentu aton Cs^{133}. Satuan SI untuk massa adalah kilogram, dan satu kilogram didefinisika sebagai massa sebuah silinder patinum iridium yang disimpan di Lembaga Berat dan Ukuran Internasional di Prancis. Tetapi selain itu juga terdapat standar massa non SI, yaitu standar massa atom yang diambil berdasarkan massa satu atom C^{12} yang tepat didefinisikan bermassa 12 dalam satuan massa atom terpadu (amu atomic mass unit, disingkat u).

Besaran-besaran fisika secara umum dapat dikelompokkan menjadi tiga jenis, besaran skalar, besaran vektor dan besaran tensor. Untuk besaran tensor, tidak akan dipelajari dalam pelajaran fisika dasar. Besaran skalar adalah besaran yang memiliki nilai saja, sedangkan besaran vektor adalah besaran yang selain memiliki nilai juga memiliki arah. Karena konsep tentang vektor banyak digunakan dalam fisika, maka akan dijelaskan lebih lanjut secara singkat mengenai besaran vektor ini.

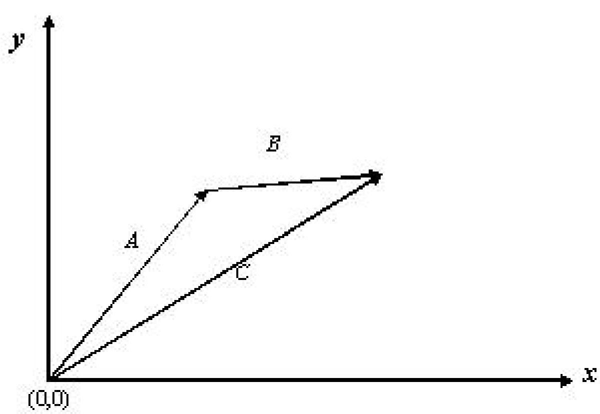
1.2 Vektor

Sebagai contoh yang mudah untuk dipahami dari sebuah vektor adalah vektor posisi. Untuk menentukan posisi sebuah titik relatif terhadap titik yang lain, kita harus memiliki sistem koordinat. Dalam ruang berdimensi tiga, dibutuhkan sistem koordinat, x, y, z untuk mendiskripsikan posisi suatu titik relatif terhadap suatu titik asal (O). Vektor posisi suatu titik P, relatif terhadap titik asal digambarkan di bawah ini.



1.2.1 Penjumlahan Vektor

Dari konsep vektor posisi juga dikembangkan konsep penjumlahan vektor. Vektor posisi titik A adalah $\vec{A}$, sedangkan posisi titik B ditinjau dari titik A adalah B. Vektor posisi titik B adalah vektor $\vec{C}$, dan $\vec{C}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$.



Negatif dari suatu vektor $\vec{A}$ dituliskan sebagai $-\vec{A}$ dan didefinisikan sebagai sebuah vektor dengan besar yang sama dengan besar vektor $\vec{A}$ tetapi dengan arah yang berlawanan, sehingga $\vec{A} + (-1)\vec{A} = 0$. Dari sini konsep pengurangan vektor muncul, jadi

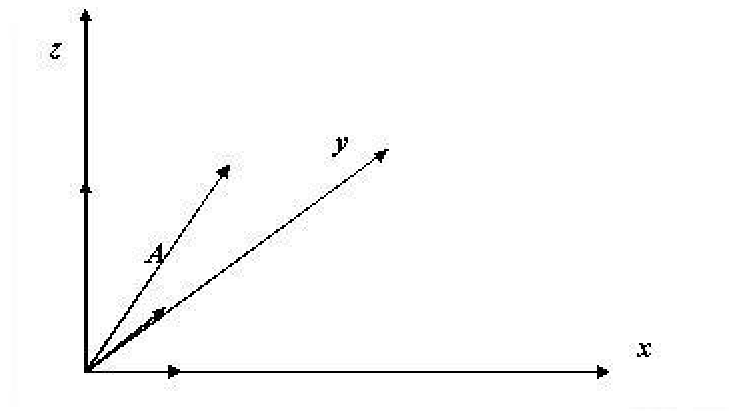
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B}.$$

Aljabar vektor bersifat komutatif dan asosiatif. Jadi $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, dan $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

Dalam ruang berdimensi tiga terdapat paling banyak tiga vektor yang dapat saling tegak lurus. Vektor-vektor yang saling tegak lurus ini dapat dijadikan vektor-vektor basis. Dalam sistem koordinat kartesan, sebagai vektor-vektor basis biasanya diambil vektor-vektor yang mengarah ke arah sumbu x, y, dan z positif, dan diberi simbol $\hat{x}$, $\hat{y}$, dan $\hat{z}$. Vektor-vektor basis ini juga dipilih bernilai satu. Sehingga sebarang vektor $\vec{A}$ dalam ruang dimensi tiga dapat dinyatakan sebagai jumlahan vektor-vektor basis dengan koefisien-koefisien A_x, A_y, A_z yang disebut sebagai komponen vektor dalam arah basis x, y dan z.

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

Dari trigonometri dapat diketahui bahwa bila sudut antara vektor $\vec{A}$ dengan sumbu x, y, dan z adalah θ_x, θ_y, dan θ_z, maka $A_x = A\cos\theta_x$, $A_y = A\cos\theta_y$, dan $A_z = A\cos\theta_z$, dengan A adalah besar $\vec{A}$. Dari teorema



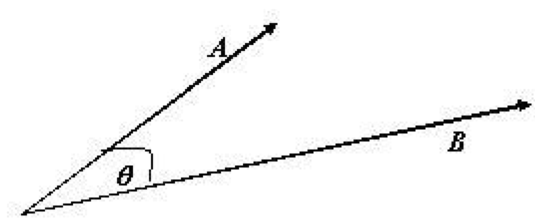
Phytagoras, diperoleh bahwa $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

1.2.2 Perkalian

Dua buah vektor dapat 'diperkalikan'. Konsep perkalian antar vektor sangat bermanfaat dalam perumusan berbagai persamaan-persamaan fisika. Konsep perkalian dalam vektor sangat berbeda dengan sekedar memperkalian dua buah bilangan (skalar), dan memiliki definisi tersendiri. Dua buah vektor dapat diperkalikan menghasilkan sebuah skalar ataupun sebuah vektor baru. Perkalian yang menghasilkan skalar disebut sebagai perkalian skalar atau perkalian titik (*dot product*), dan didefinisikan sebagai

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \ \cos\theta$$

dengan θ adalah sudut antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$. Besar vektor $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



dapat dinyatakan dalam perumusan berikut ini

$$C = \sqrt{(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\ \cos\theta}$$

Bila $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dinyatakan dalam komponen-komponennya, $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ dan $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$, maka

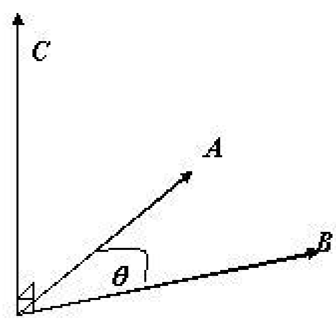
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

karena $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \cos 90^0 = 0$ (saling tegak lurus), dan $\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = \cos 0^0 = 1$. Dengan mengalikan sebarang vektor $\vec{A}$ dengan sebuah vektor basis, akan didapatkan proyeksi $\vec{A}$ ke arah vektor basis tadi, jadi misalnya $\vec{a}\cdot\hat{x} = A_x$.

Perkalian dua buah vektor yang menghasilkan sebuah vektor, disebut sebagai perkalian silang (*cross product*), untuk dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$

dituliskan

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$



Vektor $\vec{C}$ di sini adalah suatu vektor yang arahnya tegak lurus terhadap bidang di mana $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ berada, dan ditentukan oleh arah putar tangan kanan yang diputar dari $\vec{A}$ ke $\vec{B}$. Besar vektor $\vec{C}$ didefinisikan sebagai

$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \ \sin\theta$$

Besar vektor $\vec{C}$ ini dapat diinterpretasikan sebagai luasan jajaran genjang yang dua sisinya dibatasi oleh $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ Sesuai dengan definisinya, maka $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Untuk vektor-vektor basis, diperoleh $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, dan $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$.

Bab 2

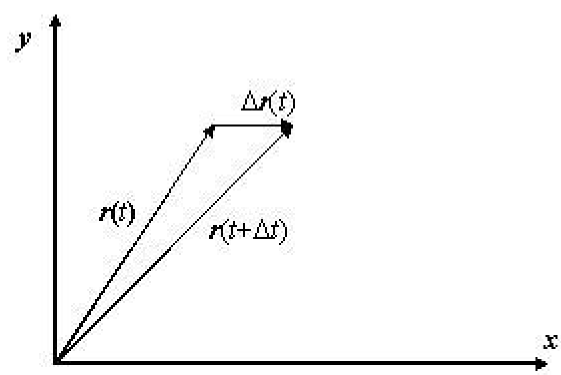
Kinematika Gerak Lurus

2.1 Posisi, Kecepatan dan Percepatan

Dalam bab ini kita akan meninjau gerak titik partikel secara geometris, yaitu meninjau gerak partikel tanpa meninjau penyebab geraknya. Cabang ilmu mekanika yang meninjau gerak partikel tanpa meninjau penyebab geraknya disebut sebagai kinematika. Walaupun kita hanya meninjau gerak titik partikel, tetapi dapat dimanfaatkan juga untuk mempelajari gerak benda maupun sistem yang bukan titik. Karena selama pengaruh penyebab gerak partikel hanya pengaruh eksternal, maka gerak keseluruhan benda dapat diwakili oleh gerak titik pusat massanya. Pembuktian terhadap pernyataan ini akan diberikan belakangan.

Kondisi gerak suatu titik partikel dideskripsikan oleh perubahan posisi partikel sebagai fungsi waktu, $\vec{r}(t)$. Dalam mekanika klasik waktu dianggap tidak bergantung pada sistem kerangka koordinat yang dipilih, waktu hanya sebagai sesuatu yang mengalir bebas dari besaran-besaran fisis lainnya. Bila fungsi $\vec{r}(t)$ sudah diketahui untuk sebarang waktu t, maka keadaan gerak partikel tadi secara praktis sudah diketahui. Tetapi terkadang informasi tentang gerak partikel tidak diketahui dalam bentuk posisi tetapi dalam besaran-besaran lain yang akan kita definisikan.

Dalam selang waktu Δt, posisi partikel akan berpindah dari $\vec{r}(t)$ menjadi $\vec{r}(t + \Delta t)$. Vektor perubahan posisinya adalah



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Kecepatan sebuah aprtikel adalah laju perubahan posisi partikel terhadap waktu. Kecepatan rerata partikel tadi dalam selang waktu Δt didefinisikan sebagai

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Sedangkan kecepatan sesaat pada saat t didefinisikan sebagai

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Besar dari vektor kecepatan sering juga disebut sebagai kelajuan. Kelajuan dari sebuah partikel dapat tidak berubah walaupun kecepatannya berubah, yaitu bila vektor kecepatan berubah arahnya tanpa berubah besarnya.

Bila kecepatan sebuah partikel pada saat t adalah $\vec{v}(t)$ maka setelah selang waktu Δt kecepatannya adalah $\vec{v}(t + \Delta t)$. Perubahan kecepatannya selama selang Δt diberikan oleh

$$\Delta v = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

Percepatan sebuah partikel adalah laju perubahan keceatan partikel terhadap waktu. Percepatan rerata partikel tadi didefinisikan sebagai

$$\vec{\bar{a}} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

sedangkan percepatan sesaatnya pada saat t didefinisikan sebagai

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Karena kecepatan dapat dituliskan sebagai derivatif posisi terhadap waktu, maka percepatan adalah derivatif kedua posisi terhadap waktu, yaitu

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

2.2 Gerak dengan kecepatan konstan

Bila kecepatan partikel konstan $\vec{v}$, maka percepatannya nol. Untuk kasus ini posisi partikel pada waktu t dapat diketahui melalui integrasi persamaan berikut ini

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan posisi $\vec{r}(0)$ ke saat akhir t dengan posisi $\vec{r}(t)$

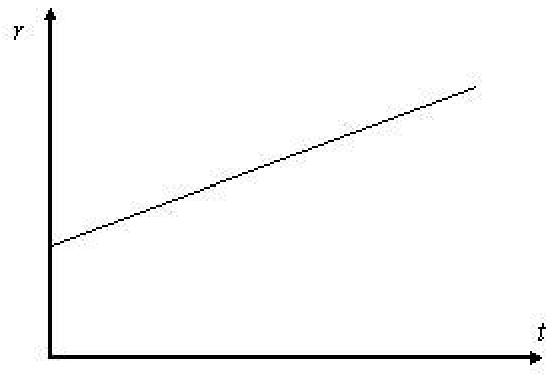
$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \vec{v}(t-0)$$

atau

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}\ t$$

Grafik hubungan posisi dan waktu membentuk garis lurus dengan nilai gradien grafik (kemiringan grafik) sama dengan nilai kecepatan yang konstan



2.3 Gerak dengan percepatan konstan

Bila percepatan partikel konstan $\vec{a}$, kecepatan partikel dapat ditentukan dari integrasi persamaan berikut ini

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t$$

yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan kecepatan $\vec{v}(0)$ ke saat akhir t dengan kecepatan $\vec{v}(t)$

$$\int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} \mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a}(t-0)$$

atau

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}\ t$$

dari persamaan ini, dengan memakai definisi kecepatan sebagai derivatif posisi terhadap waktu, diperoleh persamaan berikut ini

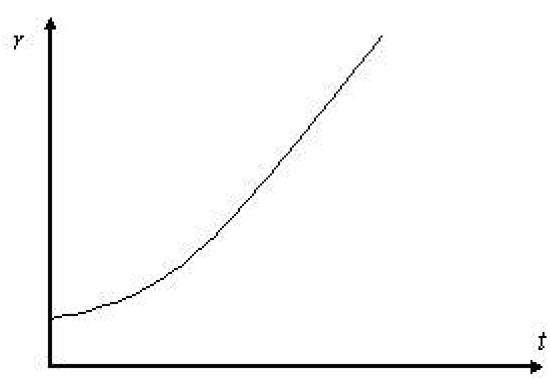
$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(0)\mathrm{d}t + \vec{a}(t-0)\mathrm{d}t$$

yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan posisi $\vec{r}(0)$ ke saat akhir t dengan posisi $\vec{r}(t)$, diperoleh

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(0)\mathrm{d}t + \vec{a}(t-0)\mathrm{d}t$$

dan diperoleh

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)\ t + \frac{1}{2}\vec{a}\ t^2$$



Grafik posisi sebagai fungsi dari waktu berbentuk grafik kuadratis (parabolik), dengan gradien grafik sama dengan besar kecepatan partikel pada saat tertentu. Sedangkan grafik kecepatan sebagai fungsi waktu berbentuk garis lurus dengan gradien grafiknya sama dengan besar percepatan partikel.

Dengan meninjau gerak satu dimensi, dapat juga dituliskan

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

atau dapat dituliskan

$$v\ \mathrm{d}v = a\mathrm{d}r$$

yang bila diintegralkan dari posisi dan kecepatan awal $r(0)$ dan $v(0)$ ke posisi dan kecepatan akhir $r(t)$ dan $v(t)$ maka diperoleh

$$\int_{v(0)}^{v(t)} v\ \mathrm{d}v = a\int_{r(0)}^{r(t)} \mathrm{d}r.$$

Hasilnya

$$v(t)^2 = v(0)^2 + 2a\ (r(t) - r(0))$$

Sebagai contoh gerak dengan percepatan konstan adalah gerak partikel jatuh bebas di dekat permukaan bumi. Dapat ditunjukkan bahwa untuk ketinggian yang tidak terlalu jauh dari permukaan bumi, percepatan gravitasi g yang dialami sebuah benda yang jatuh bebas, bernilai konstan. Dalam kasus benda jatuh bebas, bila arah positif dipilih ke arah atas, maka percepatan benda $a = -g$ (ke bawah).

2.4 Kombinasi gerak

Besaran-besaran gerak yang berupa besaran vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponennya dalam setiap arah vektor-vektor basisnya. Sehingga gerak dalam dua dimensi dapat diuraikan menjadi kombinasi dua gerak satu dimensi dalam dua arah yang saling tegak lurus (misalnya dalam arah x dan y). Demikian juga gerak dalam tiga dimensi dapat diuraikan menjadi kombinasi tiga gerak satu dimensi dalam tiga arah yang saling tegak lurus (dalam arah x, y, dan z). Semua persamaan-persamaan kinematika gerak lurus dalam bab sebelumnya, dapat digunakan untuk mendeskripsikan gerak dalam masing-masing arah. Sebagai contoh akan diberikan gerak partikel dalam dua dimensi (bidang) yang mengalami percepatan konstan dalam arah vertikal dan tidak mengalami percepatan dalam arah horizontal. Aplikasi dari gerak ini adalah gerak peluru, yang lintasannya berupa lintasan parabolik.

Misalkan di titik asal koordinat $(0, 0)$ sebuah partikel bergerak dengan kecepatan awal $\vec{v}_0$ yang membentuk sudut θ terhadap sumbu x. Partikel ini mengalami percepatan gravitasi sebesar $-g$ (ke arah sumbu y negatif). Kecepatan awal partikel dapat diuraikan menjadi komponen x dan y, yaitu $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ dan $v_{0y} = v_0 \sin\theta$. Gerak partikel sekarang dapat dianalisa sebagai gerak dengan kecepatan konstan pada arah x dan gerak dengan percepatan konstan pada arah y. Sesuai pembahasan pada bagian sebelum ini, posisi partikel pada arah x dan y diberikan oleh

$$x(t) = v_{0x}t \tag{2.1}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.2}$$

Kecepatan partikel pada arah x tetap, yaitu $v_x(t) = v_{0x}$, sedangkan kecepatan partikel pada arah y berubah sebagai $v_y(t) = v_{0y} - gt$. Besar kecepatan partikel diberikan oleh

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

Dengan mensubstitusikan variabel waktu t pada pers. (2.1) ke dalam pers. (2.2) diperoleh

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \tag{2.3}$$

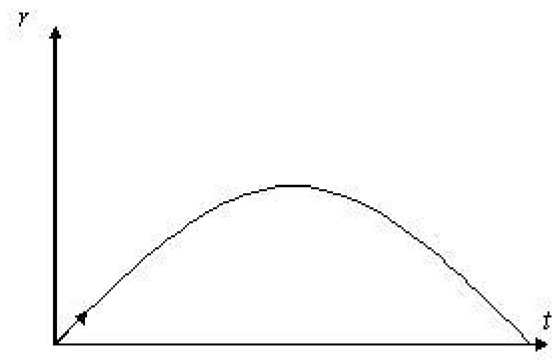
Persamaan ini adalah fungsi y yang kuadratis dalam variabel x. Titik tertinggi lintasan diperoleh dengan mencari nilai ekstrim fungsi tersebut, yang tercapai ketika

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x = 0$$

yaitu pada

$$x = \frac{v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

Posisi terjauh partikel, yaitu posisi ketika partikel kembali memiliki posisi $y = 0$, dapat diperoleh dengan mencari akar pers. (2.3), (dengan memakai



rumus abc)

$$x = \frac{v_{0y}v_{0x}}{g} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4v_{0y}^2 v_{0x}^2}{g^2}}$$

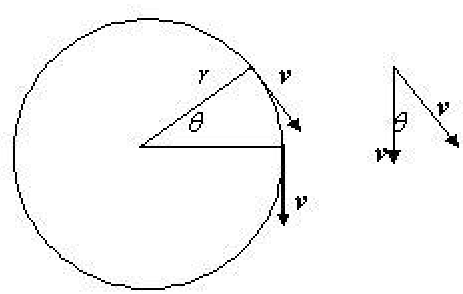
terdapat dua nilai, dan dipilih yang tidak nol (karena $x = 0$ tidak lain adalah titik awal gerak partikel yang juga memiliki koordinat $y = 0$), jadi titik terjauh yang ditempuh adalah pada

$$x = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{v_0 \sin 2\theta}{g} \tag{2.4}$$

2.5 Gerak melingkar beraturan

Gerak melingkar beraturan adalah gerak dengan lintasan berbentuk lingkaran dan kelajuan konstan. Walau kelajuannya konstan, tetapi vektor kecepatannya berubah, yaitu berubah arahnya. Kita tinjau suau partikel bergerak melingkar dengan jejari lintasan lingkarannya r. Lihat gambar di bawah ini

Dari gambar di atas, untuk selang waktu Δt, partikel yang bergerak



melingkar telah menempuh jarak sejauh

$$v\Delta t = r\theta \tag{2.5}$$

dengan θ adalah sudut dalam satuan radian. Dalam selang waktu tersebut, karena vektor kecepatan selalu tegak lurus terhadap jejari lingkaran, arah vektor kecepatan juga sudah berubah sebesar $\Delta\vec{v}$ (lihat gambar),

Sehingga untuk selang waktu yang cukup kecil,

$$\Delta v = \theta v. \tag{2.6}$$

Dengan mengeliminasi θ dari pers. (2.5) dan (2.6), diperoleh

$$\Delta v = v^2 \frac{\Delta t}{r} \tag{2.7}$$

atau, dengan membagi kedua ruas dengan Δt, akan didapatkan percepatan

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \tag{2.8}$$

Arah percepatannya searah dengan arah perubahan kecepatan $\Delta\vec{v}$, untuk Δt yang sangat kecil, akan tegak lurus terhadap arah kecepatan $\vec{v}$ mengarah ke pusat lingkaran. Percepatan ini disebut sebagai percepatan sentripetal, dengan besar yang konstan dan selalu mengarah ke pusat lingkaran.

Untuk gerak melingkar dengan kelajuan yang tidak konstan, dapat dianalisa dengan menuliskan vektor kecepatan sebagai $\vec{v} = v\hat{u}$, dengan $\hat{u}$ adalah vektor satuan searah dengan arah kecepatan, dan menyinggung (tangensial terhadap) lintasan. Dengan menderivatifkan vektor kecepatan ini, diperoleh

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v\hat{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} \tag{2.9}$$

suku pertama disebut sebagai suku percepatan tangensial

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u} = a_t\hat{u} \tag{2.10}$$

sedangkan pada suku kedua,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r} = -\frac{v}{r}\hat{r} \tag{2.11}$$

dengan $\hat{r}$ adalah vektor satuan arah radial. Maka suku kedua ini tidak lain adalah percepatan radial atau sentripetal

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \tag{2.12}$$

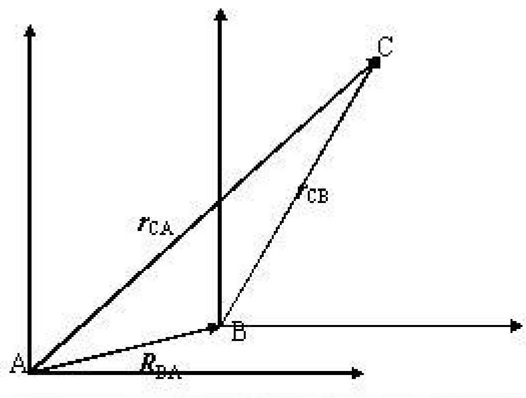
2.6 Gerak Relatif

Ketika menganalisa gerak suatu partikel, kita meninjaunya relatif terhadap suatu titik acuan dan sistem koordinat tertentu, yang secara bersama-sama disebut sebagai kerangka acuan. Besaran-besaran gerak partikel tersebut, seperti posisi, kecepatan dan percepatan dapat bernilai berbeda bila dilihat dari kerangka acuan yang berbeda. Dalam analisa ini, kita memakai pendekatan klasik di mana waktu dianggap sama di semua kerangka acuan. Ditinjau misalnya suatu kerangka acuan A dan kerangka acuan kedua B. Posisi titik asal B dlihat dari titik asal A, diberikan oleh vektor $\vec{R}_{BA}(t)$. Posisi sebuah partikel C menurut kerangka A dan B secara berturutan adalah $\vec{r}_{CA}(t)$ dan $\vec{r}_{CB}(t)$. Hubungan antara $\vec{r}_{CA}(t)$ dan $\vec{r}_{CB}(t)$, diberikan oleh (lihat gambar)

$$\vec{r}_{CB}(t) = \vec{r}_{CA}(t) - \vec{R}_{BA}(t) = \tag{2.13}$$

Dari persamaan ini, dengan derivatif terhadap waktu, diperoleh hubungan kecepatan partikel menurut A dan B

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CA}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{2.14}$$



atau

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CA} - \vec{V}_{BA} \tag{2.15}$$

dengan $\vec{v}_{CB}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka B, $\vec{v}_{CA}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka A, dan $\vec{V}_{BA}$ adalah kecepatan kerangka B dilihat dari kerangka A.

Dari pers. (2.15), dengan menderivatifkannya terhadap waktu, diperoleh hubungan percepatan partikel menurut A dan B

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CA}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{V}_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{2.16}$$

atau

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CA} - \vec{a}_{BA} \tag{2.17}$$

dengan $\vec{a}_{CB}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka B, $\vec{a}_{CA}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka A, dan $\vec{a}_{BA}$ adalah kecepatan kerangka B dilihat dari kerangka A.

Kasus khusus adalah bila percepatan antara kerangka A dan B adalah nol, atau kerangka B bergerak relatif terhadap A dengan kecepatan konstan. Pada kasus ini, percepatan partikel ditinjau dari kedua kerangka bernilai sama. Kumpulan kerangka-kerangka acuan semacam ini disebut kerangka-kerangka acuan inersial. Mengenai sifat inersial ini, akan dibahas dalam bab selanjutnya.

Bab 3

Dinamika

Cabang dari ilmu mekanika yang meninjau gerak partikel dengan meninjau penyebab geraknya dikenal sebagai dinamika. Dalam bab ini kita akan membahas konsep-konsep yang menghubungkan kondisi gerak benda dengan keadaan-keadaan luar yang menyebabkan perubahan keadaan gerak benda.

3.1 Inersia

Bila sebuah benda berada dalam keadaan diam, untuk menggerakkannya dibutuhkan pengaruh luar. Misalnya untuk menggerakkan sebuah balok yang diam di atas lantai, kita dapat mendorongnya. Dorongan kita ini adalah pengaruh luar terhadap balok tadi yang menyebabkan benda tersebut bergerak. Dari pengalaman sehari-hari, ketika pengaruh luar, yaitu dorongan kita tadi, dihilangkan dari balok, maka balok tersebut lama-lama akan berkurang kecepatannya dan akhirnya diam. Mungkin kita akan menyimpulkan bahwa agar sebuah benda terus bergerak kita perlu memberi dorongan pada benda tadi terus menerus, dan bila pengaruh luar tersebut hilang, maka benda akan kembali diam. Tetapi apakah pengaruh luar pada benda tadi benar-benar sudah hilang? Bagaimana dengan pengaruh lantai terhadap benda tadi, yang jelas-jelas menghambat gerak benda? Seandainya kita memilih lantai yang permukaannya licin, dan balok kita tadi juga memiliki permukaan yang licin maka setelah dorongan kita hilangkan, balok tadi masih akan tetap bergerak untuk waktu yang cukup lama. Bisa kita bayangkan bila tidak ada hambatan (super licin) dari lantai terhadap balok, maka balok tadi akan tetap terus bergerak dengan kecepatan konstan walaupun dorongan kita sudah dihilangkan.

Jadi dapat disimpulkan bahwa bila pengaruh luar pada sebuah benda benar-benar dihilangkan, maka sebuah benda akan tetap diam bila pada mulanya diam, dan akan tetap bergerak dengan kecepatan konstan, bila pada mulanya bergerak dengan kecepatan konstan. Kesimpulan ini, yang pertama kali disimpulkan oleh Galileo Galilei, dikenal sebagai prinsip inersia atau kelembaman. Benda-benda cenderung untuk mempertahankan kondisi geraknya, bila dia diam, akan tetap diam dan bila bergerak, akan tetap bergerak dengan kecepatan konstan, selama tidak ada pengaruh luar yang mengubah kondisi geraknya.

3.2 Hukum Newton

Bagaimana pengaruh luar mempengaruhi perubahan kondisi gerak suatu benda? Hal ini dijawab dengan hukum Newton ke-2. Karena keadaan 'alami' suatu benda adalah dia bergerak dengan kecepatan tertentu (diam adalah 'bergerak' dengan $\vec{v} = 0$), maka logis bila dikatakan pengaruh luar akan menyebabkan perubahan kecepatan $\Delta\vec{v}$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa pengaruh luar tersebut akan menyebabkan percepatan pada benda.

Tetapi dari berbagai pengamatan ditemukan bahwa untuk menghasilkan perubahan kecepatan yang sama, pada benda yang berbeda dibutuhkan 'besar' pengaruh luar yang berbeda pula. Sebaliknya dengan besar pengaruh luar yang sama, perubahan kecepatan pada benda-benda ternyata berbeda-beda. Jadi ada suatu kuantitas intrinsik (diri) pada benda yang menentukan ukuran seberapa besar sebuah pengaruh luar dapat mengubah kondisi gerak benda tersebut. Kuantitas ini tampaknya sebanding dengan jumlah zatnya, tetapi juga tergantung pada jenis zatnya. Kuantitas intrinsik pada benda-benda ini kemudian disebut sebagai massa inersia, disimbulkan dengan m. Massa inersia (atau sering juga disebut saja sebagai massa) memberikan ukuran derajat kelembaman atau derajat inersia sebuah benda. Satuan dari massa adalah kilogram, dalam satuan SI. Makin besar massanya makin sulit untuk menghasilkan perubahan kondisi gerak pada benda tersebut. Pengaruh luar yang menyebabkan berubahnya keadaan gerak suatu benda kemudian disebut sebagai gaya (*force*) dan disimbolkan dengan $\vec{F}$. Satuan dari gaya adalah newton (N).

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa ‘kuantitas gerak’ suatu benda tergantung pada massa inersia dan kecepatan benda. Untuk itu didefinisikan suatu besaran vektor yang disebut sebagai momentum $\vec{p} \equiv mv$, sebagai kuantitas gerak suatu benda. Gaya kemudian didefinisikan (diukur) sebagai laju perubahan momentum

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{3.1}$$

Inilah yang kemudian dikenal sebagai hukum Newton kedua tentang gerak benda. Yaitu pengaruh luar (gaya) yang bekerja pada sebuah benda sebanding dengan laju perubahan kuantitas gerak (momentum) terhadap waktu. Sedangkan hukum Newton pertama adalah kasus khusus ketika tidak ada pengaruh luar pada sebuah benda, atau ketika gayanya sama dengan nol, yang tidak lain adalah perumusan ulang dari prinsip inersia. Yaitu bila total gaya yang bekerja pada sebuah benda adalah nol, maka benda tersebut akan tetap diam bila awalnya diam atau akan tetap bergerak dengan kecepatan konstan bila awalnya bergerak.

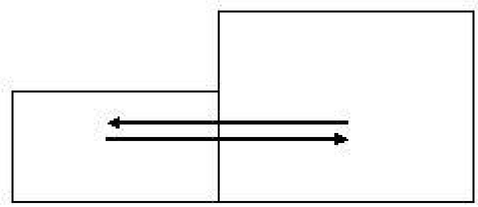
Untuk kasus di mana massa benda tetap konstan, maka

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}. \tag{3.2}$$

Hukum Newton ketiga memberikan informasi tentang sifat gaya. Gaya yang bekerja pada sebuah benda berasal dari benda lain yang ada di lingkungannya. Dari fakta serta eksperimen diketahui bahwa ketika sebuah benda memberi gaya pada benda kedua, banda kedua juga akan memberi gaya pada benda pertama tadi. Walaupun secara prinsip, sifat gaya-gaya tadi tidak dapat dipastikan kecuali lewat eksperimen, tetapi kita dapat memahaminya melalui pengandaian berikut ini. Ditinjau suatu sistem yang terdiri dari dua partikel. Bila tidak ada gaya dari luar sistem yang mempengaruhinya, sistem tadi sebagai satu kesatuan, tampak tidak mengalami pengaruh luar, sehingga seharusnya sistem tersebut akan tetap diam atau bergerak dengan kecepatan konstan, sesuai hukum newton kedua. Kita dapat memilih suatu kerangka acuan di mana sistem dalam keadaan diam. Sekarang seandainya antara benda pertama dan benda kedua dalam sistem saling memberi gaya pada yang lain, maka semua total gaya seharusnya nol, karena sistem tidak berubah keadaan geraknya. Jadi gaya yang diberikan benda pertama pada benda kedua $\vec{F}_{21}$ ditambah dengan gaya yang diberikan benda kedua pada benda pertama $\vec{F}_{12}$ harus sama dengan nol, yang berarti

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Pasangan gaya semacam di atas sering disebut sebagai pasangan gaya aksi-reaksi, dan persamaan di atas disebut sebagai hukum newton ketiga atau hukum aksi-reaksi. Kata aksi-reaksi di sini tidak mengandung arti suatu proses sebab akibat, karena kedua pasangan aksi-reaksi tersebut muncul



secara bersamaan. Bila salah satu gaya disebut sebagai aksi, maka pasangannya adalah reaksi, demikian juga sebaliknya. Juga perlu diperhatikan bahwa pasangan aksi-reaksi selalu bekerja pada dua benda yang berbeda, bukan pada satu benda yang sama.

3.3 Beberapa Jenis Gaya

Hukum newton hanya memberikan perumusan tentang bagaimana gaya mempengaruhi keadaan gerak suatu benda, yaitu melalui perubahan momentumnya. Sedangkan bagaimana perumusan gaya dinyatakan dalam variabel-variabel keadaan benda, harus dicari melalui pengamatan terhadap benda-benda penyebab gaya. Beberapa kasus sederhana perumusan tersebut akan diuraikan di bawah ini.

Gaya berat. Untuk semua benda yang dekat permukaan bumi, percepatan gravitasi yang dialami benda dianggap sama, sehingga berat benda sebanding dengan massanya. Gaya berat pada sebuah benda yang dekat dengan permukaan bumi diberikan oleh

$$W = mg \tag{3.3}$$

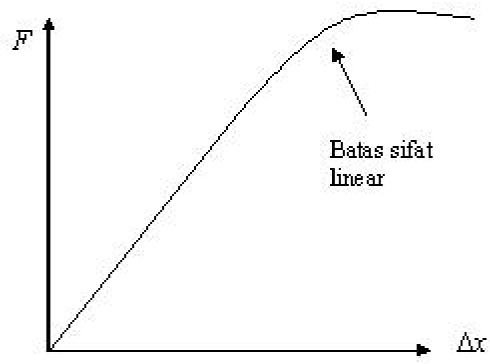
dengan g adalah percepatan gravitasi bumi, yang nilainya pada permukaan bumi sekitar $9,8$ m/s^2. Untuk benda jauh dari permukaan bumi, harus digunakan perumusan percepatan gravitasi yang diperoleh dari hukum gravitasi universal. Hal ini akan dibahas dalam bab tersendiri.

Gaya pegas. Sebuah pegas ideal bila diregangkan atau ditekan akan memberikan gaya yang sebanding dengan besar perubahan panjang pegas. Jadi gaya yang diberikan oleh pegas adalah

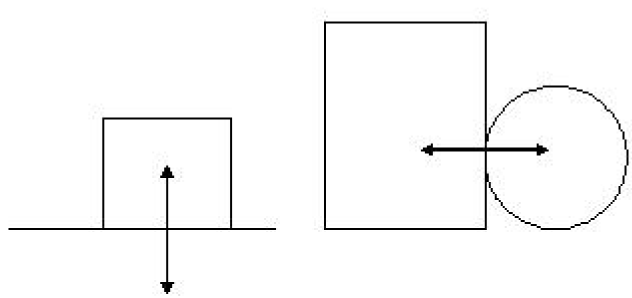
$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} \tag{3.4}$$

$\Delta\vec{x}$ adalah vektor besar perubahan panjang pegas dan tanda negatif pada persamaan di atas menunjukkan arah gayanya yang berlawanan dengan arah perubahan panjang pegas. Konstanta kesebandingan k disebut juga sebagai konstanta pegas. Kebanyakan pegas real akan mengikuti pers. (3.4) untuk nilai $\Delta\vec{x}$ yang cukup kecil.

Gaya normal/Gaya kontak. Antara dua permukaan benda yang saling bersentuhan akan ada gaya dari permukaan benda yang satu ke permukaan benda yang kedua, dan sebaliknya. Arah gaya normal ini tegak lurus terhadap permukaan dan membentuk pasangan aksi-reaksi. Selain dari itu tidak



ada informasi lain mengenai besar gaya normal. Tetapi besar gaya normal dapat diketahui dari persamaan-persamaan hukum Newton, bila besar gaya-gaya yang lain diketahui.



Gaya gesekan. Antara dua permukaan benda yang bersentuhan akan ada gaya yang mengarah tangensial terhadap permukaan sentuh. Gaya ini merupakan pasangan dari gaya normal/gaya kontak dan secara bersama mendeskripsikan total gaya yang bekerja antara dua benda yang bersentuhan. Gaya tangensial ini lebih sering dikenal sebagai gaya gesekan, karena sifatnya yang menghambat gerak dari benda yang bersentuhan. Dipostulatkan bahwa gaya gesekan ini sebading dengan gaya normal, karena bila gaya normal tidak ada berarti tidak terjadi persentuhan dan tidak akan ada gesekan. Koefisien kesebandingannya disebut sebagai koefisien gesekan. Ketika sebuah benda dalam keadaan diam di atas suatu permukaan ternyata dibutuhkan gaya yang lebih besar pada awalnya untuk memulai gerakan. Hal ini karena antara atom-atom ataupun molekul kedua permukaan telah terbentuk ikatan-ikatan antara molekul maupun atom. Sehingga dibutuhkan lebih banyak gaya untuk memutus ikatan tersebut. Karena itu ada dua jenis koefisien gesekan, koefisien gesekan statis μ_s, yang terkait dengan benda yang diam dan koefisien gesekan kinetik μ_k, untuk benda yang bergerak. Gaya gesekan kinetik f_k selalu berlawanan arah dengan arah gerak benda, dan besarnya dirumuskan sebagai

$$f_k = \mu_k N. \tag{3.5}$$

Sedangkan gesekan statik selalu berlawanan arah dengan arah gaya yang berusaha menggerakkan benda, dan besarnya dirumuskan sebagai

$$f_s = \mu_s N. \tag{3.6}$$

Bab 4

Dinamika 2 - Usaha dan Tenaga

Disamping perumusan hukum newton, terdapat konsep lain yang dapat digunakan untuk mengetahui keadaan gerak suatu benda. Seperti halnya hukum newton, konsep ini menghubungkan pengaruh luar (gaya) dengan keadaan gerak benda. Konsep ini adalah konsep usaha-tenaga. Bedanya dengan konsep hukum newton, usaha dan tenaga adalah besaran skalar. Karena itu, untuk beberapa kasus, konsep usaha-tenaga dapat lebih mudah digunakan untuk mengetahui keadaan gerak suatu benda akibat pengaruh luar (gaya).

4.1 Usaha

Perlu diperhatikan, kita tidak boleh mengasosiasikan pemahaman kata 'usaha' dalam bahasa sehari-hari dengan istilah usaha dalam fisika, walaupun ada kemiripannya. Sebagai istilah fisika usaha yang dilakukan suatu gaya didefinisikan sebagai hasil kali skalar vektor gaya dan vektor perpindahan benda, atau hasil kali komponen gaya yang searah dengan perpindahan benda dengan besar perpindahan benda. Perlu diperhatikan bahwa perpindahan bendanya tidak harus disebabkan oleh gaya tadi. Usaha dilambangkan dengan W (*work*) dan untuk gaya yang konstan dirumuskan sebagai

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos\theta \tag{4.1}$$

dengan θ adalah sudut antara vektor gaya dan vektor perpindahan benda $\vec{s}$. Bila gayanya tidak konstan, maka harus dijumlahkan untuk setiap bagian perpindahannya dengan gaya yang konstan,

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \tag{4.2}$$

Bila perubahannya kontinyu, maka perumusan di atas berubah menjadi integral

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{4.3}$$

untuk perpindahan dari titik a ke titik b, melaluis suatu lintasan.

4.2 Teorema Usaha-Energi

Sekarang kita tinjau total usaha, yaitu usaha yang dilakukan oleh semua gaya yang bekerja pada benda, dan kita jumlahkan menurut komponen-komponen produk skalarnya

$$W_{\text{tot}} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{4.4}$$

$$= \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z). \tag{4.5}$$

Untuk memudahkan analisa, kita tinjau komponen x saja, karena analisa untuk komponen lainnya serupa. Diketahui bahwa

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \tag{4.6}$$

sehingga kita dapat menuliskan pers. (4.4) sebagai

$$W_{\text{tot}} = \int_a^b m(v_x \mathrm{d}v_x + v_y \mathrm{d}v_y + v_z \mathrm{d}v_z) \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\Big|_a^b = \frac{1}{2}m(v_b^2 - v_a^2). \tag{4.8}$$

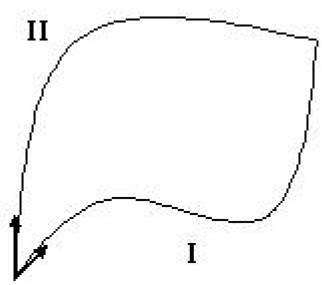
Jadi nilai total usaha bergantung pada suatu kuantitas akhir dan awal, yaitu selisih besar kuadrat kecepatan akhir dan awal dikali setengah massa. Kuantitas ini kemudian diberi nama energi, dan karena kuantitas ini bernilai tidak nol ketika kecepatannya tidak nol, maka diberi nama energi kinetik $E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2$. Jadi total usaha yang bekerja pada suatu benda sama dengan perubahan energi kinetik

$$W_{\text{tot}} = \Delta E_k = E_k(f) - E_k(i). \tag{4.9}$$

Pernyataan di atas dikenal sebagai teorema usaha-energi.

4.3 Gaya Konservatif dan Energi Potensial

Gaya konservatif $\vec{F}$ adalah gaya yang memenuhi sifat: Usaha yang dilakukan oleh gaya konservatif hanya bergantung pada posisi awal dan akhir benda, dan tidak bergantung pada lintasan perpindahan benda. Karena itu pula untuk lintasan yang berbentuk melingkar (kembali ke posisi awal) nilai usaha yang dilakukan oleh gaya konservatif selalu nol. Lihat gambar,



Jadi untuk gaya konservatif kedua lintasan I dan II menghasilkan nilai usaha yang sama

$$W_k = \int_{a\ I}^{b} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{a\ II}^{b} \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{4.10}$$

demikian pula

$$\oint \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{4.11}$$

Karena hanya bergantung pada posisi akhir dan awal saja, maka kita dapat mendefinisikan suatu kuantitas energi, yang nilainya tergantung pada posisi. Serta dipilih nilai perubahan energi ini sama dengan negatif dari usaha yang dilakukan gaya konservatif, sehingga energi ini menggambarkan potensi 'posisi' benda untuk melakukan usaha, dan kuantitas energi ini disebut energi potensial, dilambangkan U. Jadi

$$W_k = \int_a^b \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\Delta U = -(U(b) - U(a)) \tag{4.12}$$

Perhatikan bahwa karena yang memiliki arti fisis, yaitu yang terkait dengan usaha, hanya selisih energi potensial, maka kita dapat bebas memilih di titk/posisi mana nilai energi potensial ini sama dengan nol.

Sebagai contoh gaya konservatif adalah gaya pegas. Usaha yang dilakukan pegas pada benda ketika diregangkan dari panjang x_0 ke panjang x, $\Delta x = x - x_0$ adalah

$$W_k = \int_{x_0}^{x} (-kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) \tag{4.13}$$

Bila titik x_0, dipilih sebagai titik referensi di mana energi potensialnya dipilih sama dengan nol, maka

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.14}$$

Contoh gaya konservatif lainnya adalah gaya gravitasi bumi (gaya berat). Usaha yang dilakukan gravitasi pada benda ketika dipindah dari ketinggian

h_0 ke ketinggian h, $\Delta h = h - h_0$ adalah

$$W_k = \int_{h_0}^{h} (-mg)\mathrm{d}x = -mg(h - h_0) \tag{4.15}$$

Bila titik h_0, dipilih sebagai titik referensi (biasanya permukaan bumi) di mana energi potensialnya dipilih sama dengan nol, maka

$$U(x) = mgh \tag{4.16}$$

Contoh gaya yang tak konservatif adalah gaya gesek. Usaha yang dilakukan gaya gesek tentu saja bergantung pada lintasan yang dilalui benda.

Total usaha yang bekerja pada sebuah benda dapat berupa usaha oleh gaya konservatif W_k dan usaha oleh gaya nonkonservatif W_{nk}. Dari pers. (4.9) dan (4.12), kita dapatkan

$$W_{\mathrm{tot}} = W_k + W_{nk} = \Delta E_k \tag{4.17}$$

atau

$$-\Delta U + W_{nk} = \Delta E_k \tag{4.18}$$

Besaran energi potensial ditambah energi kinetik disebut sebagai energi mekanik $E_m = U + E_k$, sehingga kita dapatkan

$$\Delta Em = \Delta(U + E_k) = W_{nk} \tag{4.19}$$

Perubahan energi mekanik pada suatu benda sama dengan usaha yang dilakukan oleh gaya nonkonservatif pada benda tersebut. Untuk kasus di mana hanya ada gaya konservatif yang bekerja pada suatu benda, maka perubahan energi mekanik benda sama dengan nol, dan energi mekaniknya tetap.

Bab 5

Sistem Partikel

Dalam pembahasan-pembahasan sebelumnya kita hanya meninjau sebuah partikel atau sebuah benda yang diperlakukan sebagai partikel titik. Dalam bab ini kita akan meninjau kasus yang lebih umum, dengan sistem ataupun benda yang terdiri dari banyak partikel (titik partikel) maupun benda yang terdiri dari partikel-partikel yang dianggap tersebar secara kontinyu pada benda.

5.1 Pusat Massa

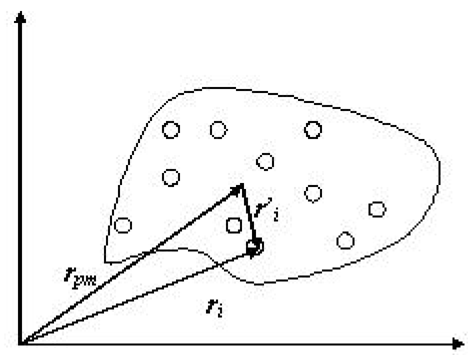
Posisi pusat massa sebuah sistem banyak partikel didefinisikan sebagai berikut

$$\vec{r}_{\text{pm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \tag{5.1}$$

dengan $\vec{r}_i$ adalah posisi partikel ke-i di dalam sistem, dan

$$M = \sum_i m_i \tag{5.2}$$

Lihat gambar di atas. Dengan mengganti $\vec{r}_i = \vec{r}_{\rm pm} + \vec{r}_i'$, di mana $\vec{r}_i'$ adalah



posisi partikel ke-i relatif terhadap pusat massa, maka pers. (5.1) menjadi

$$\vec{r}_{\rm pm} = \frac{\sum_i m_i(\vec{r}_{\rm pm} + \vec{r}_i')}{M} = \vec{r}_{\rm pm} + \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i')}{M} \tag{5.3}$$

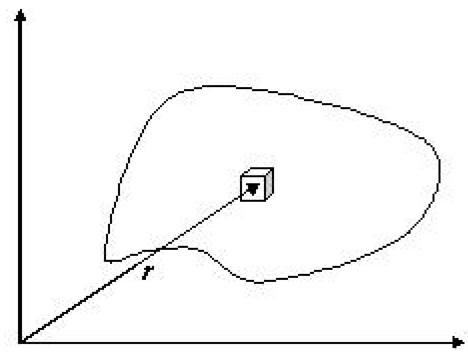
sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \tag{5.4}$$

Bila bendanya bersifat kontinyu, maka jumlahan di pers. (5.1) menjadi integral

$$\vec{r}_{\rm pm} = \frac{1}{M} \sum \vec{r} \mathrm{d}m \tag{5.5}$$

dengan dm adalah elemen massa pada posisi $\vec{r}$.



5.2 Gerak Pusat Massa

Gerak pusat massa dapat diperoleh melalui definisi pusat massa di pers. (5.1). Kecepatan pusat massa diperoleh dari derivatif pers. (5.1)

$$\vec{v}_{\text{pm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \tag{5.6}$$

Dari persamaan ini, setelah dikalikan dengan M, diperoleh

$$M\vec{v}_{\text{pm}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \tag{5.7}$$

Besaran $M\vec{v}_{\text{pm}}$ yang dapat kita anggap sebagai momentum pusat massa, tidak lain adalah total momentum sistem (jumlahan seluruh momentum partikel dalam sistem).

Dengan menderivatifkan pers. (5.7) terhadap waktu, diperoleh

$$M\vec{a}_{\mathrm{pm}} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{5.8}$$

dengan $\vec{F}_i$ adalah total gaya yang bekerja pada partikel ke-i. Persamaan di atas menunjukkan bahwa gerak pusat massa ditentukan oleh total gaya yang bekerja pada sistem.

Gaya yang bekerja pada sistem dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, gaya internal yaitu gaya antar partikel di dalam sistem, dan gaya eksternal yaitu gaya yang berasal dari luar sistem. Untuk gaya internal, antara sembarang dua partikel dalam sistem, i dan j misalnya, akan ada gaya pada i oleh j dan sebaliknya (karena aksi-reaksi), tetapi

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = 0$$

Sehingga jumlah total gaya internal pada sistem akan lenyap, dan

$$M\vec{a}_{\mathrm{pm}} = \sum_i \vec{F}_{i\mathrm{eks}} = \vec{F}_{\mathrm{eks}} \tag{5.9}$$

Jadi gerak pusat massa sistem hanya ditentukan oleh total gaya eksternal yang bekerja pada sisem.

Ketika tidak ada gaya eksternal yang bekerja pada suatu sistem, maka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{p}_i = 0 \tag{5.10}$$

Atau berarti total momentum seluruh partikel dalam sistem, konstan,

$$\sum_i \vec{p}_i = konstan. \tag{5.11}$$

5.3 Tumbukan

Dalam proses tumbukan antara dua benda, gaya yang terlibat, ketika kedua benda dilihat sebagai satu kesatuan, hanya gaya internal. Sehingga pada semua proses tumbukan, selama tidak ada gaya eksternal, total momentum sistem konstan. Untuk memudahkan kita cukup meninjau tumbukan dalam satu dimensi. Untuk kasus dua dan tiga dimensi, karena sifat vektorial dari momentum, hasilnya dapat diperoleh sebagai jumlahan vektor kasus satu dimensi

Ditinjau tumbukan antara partikel 1 dan 2, dengan massa m_1 dan m_2, dan besar kecepatan awal v_1 dan v_2. Walau kita sudah mengetahui dari pembahasan bagian sebelumnya bahwa momentum total sistem kekal, tetapi di sini kita akan menjabarkannya lagi dengan meninjau gaya tumbukannya secara langsung. Ketika tumbukan terjadi, partikel 1 memberi gaya ke partikel 2 sebesar $\vec{F}_{21}$, dan partikel 2 memberi gaya ke partikel 1 sebesar $\vec{F}_{12}$. Dari hukum Newton kedua,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

sehingga

$$\Delta\vec{p}_1 = \int \vec{F}_{12}\ \mathrm{d}t \tag{5.13}$$

Besaran integral di ruas kiri persamaan di atas juga disebut sebagai impuls yang diberikan oleh gaya $\vec{F}_{12}$. Untuk partikel kedua berlaku

$$\Delta\vec{p}_2 = \int \vec{F}_{21}\ \mathrm{d}t = -\int \vec{F}_{12}\ \mathrm{d}t \tag{5.14}$$

sehingga bila pers. (5.13) dan (5.14) dijumlah, didapatkan

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_0 = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{5.15}$$

atau berarti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_1 v_2' \tag{5.16}$$

Dapat disusun ulang sebagai

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \tag{5.17}$$

Kita akan meninjau terlebih dulu kasus ekstrim, yaitu tumbukan elastik, di mana tidak ada energi sistem yang hilang (sebagai panas maupun bunyi), dan tumbukan total tak elastik, di mana kedua partikel atau benda menempel dan bergerak bersama-sama.

5.3.1 Tumbukan elastik

Dalam tumbukan elastik, energi sistem sebelum dan sesudah tumbukan, tetap sama

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{2'} + \frac{1}{2}m_1 v_2^{2'} \tag{5.18}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan sebagai

$$m_1(v_1^2 - v_1^{2'}) = m_2(v_2^{2'} - v_2^2) \tag{5.19}$$

Dengan membagi persamaan ini, dengan pers. (5.17), diperoleh

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \tag{5.20}$$

atau

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = 1 \tag{5.21}$$

Koefisien e disebut koefisien resistusi, dan untuk kasus tumbukan elastik nilai $e = 1$.

5.3.2 Tumbukan tak elastik

Tumbukan tak elastik adalah tumbukan yang mana setelah tumbukan kedua benda menyatu dan bergerak dengan kecepatan sama, sehingga $v_1' = v_2'$. Ini berarti pada tumbukan total tak elastik, nilai $e = 0$. Untuk sembarang tumbukan tak elastik, nilai e adalah antara kedua kasus tadi, yaitu $0 \leq e \leq 1$.

Untuk kasus tumbukan umum, dengan koefisien restitusi e

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{5.22}$$

atau

$$v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \tag{5.23}$$

Dengan memakai pers. (5.23) dan (5.17), diperoleh

$$v_1' = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{5.24}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - em_1)v_2 + (1+e)m_1v_1}{m_1+m_2} \tag{5.25}$$

Kasus-kasus khusus, misalnya tumbukan antara dua benda dengan salah satunya memiliki massa yang sangat besar. Dari pers. (5.24) benda yang bermassa besar praktis tidak berubah keadaan geraknya, sedangkan benda yang bermassa kecil akan berbalik arah.

Bab 6

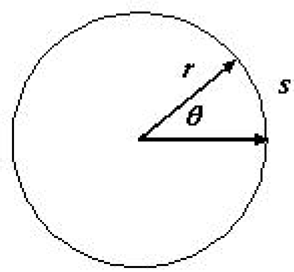
Rotasi Benda Tegar

Benda tegar adalah sistem partikel yang mana posisi relatif partikel-partikelnya, satu dengan yang lainnya di dalam sistem, (dianggap) tetap. Akibatnya ketika benda ini berotasi terhadap suatu sumbu tetap, maka jarak setiap partikel dalam sistem terhadap sumbu rotasi akan selalu tetap. Di sini kita hanya akan meninjau gerak rotasi dengan sumbu putar yang tetap orientasinya.

6.1 Kinematika Rotasi

Tinjau rotasi sebuah partikel dalam lintasan lingkaran dengan jejari r.

Jarak yang telah ditempuh dalam selang waktu Δt adalah s terkait dengan sudut θ (dalam radian). Hubungan s dan θ diberikan oleh $s = r\theta$. Untuk



selang waktu yang sangat kecil maka besar kecepatan linier diberikan oleh

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{6.1}$$

besaran $\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \equiv$ disebut sebagai kecepatan sudut, yang arahnya diberikan oleh arah putar tangan kanan, tegak lurus bidang lingkaran. Jadi hubungan antara kecepatan linier dengan kecepatan sudut diberikan oleh

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{6.2}$$

Percepatan sudut α didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan sudut terhadap waktu,

$$\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{6.3}$$

Hubungan antara percepatan linier dan percepatan sudut diberikan oleh

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha \tag{6.4}$$

dengan arah α diberikan oleh arah perubahan ω, atau secara vektor

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times r. \tag{6.5}$$

Karena persamaan-persamaan kinematika yang menghubungkan θ, ω dan α bentuknya sama dengan persamaan-persamaan kinematika gerak linear, maka dengan memakai analogi ini akan diperoleh kaitan sebagai berikut untuk keceptan sudut konstan

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \tag{6.6}$$

dan kaitan-kaitan berikut untuk percepatan sudut konstan

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{6.7}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \tag{6.8}$$

$$\omega(t)^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta. \tag{6.9}$$

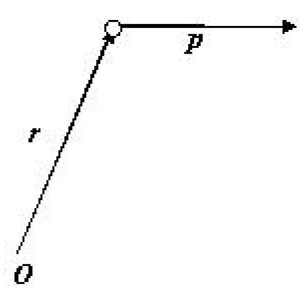
6.2 Dinamika Rotasi

6.2.1 Torka dan momentum sudut

Untuk memudahkan penyelidikan dan analisa terhadap gerak rotasi, didefinisikan beberapa besaran sebagai analog konsep gaya dan momentum. Pertama didefinisikan konsep momentum sudut l. Momentum sudut suatu partikel yang memiliki momentum linear $\vec{p}$ dan berada pada posisi $\vec{r}$ dari suatu titik referensi O adalah

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{6.10}$$

Perlu diperhatikan bahwa nilai l bergantung pada pemilihan titik referensi O, nilainya dapat berubah bila digunakan titik referensi yang berbeda.



Laju perubahan momentum sudut terhadap waktu didefinisikan sebagai besaran torka $\vec{\tau}$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{6.11}$$

karena bentuk

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \tag{6.12}$$

maka

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}. \tag{6.13}$$

6.3 Sistem partikel

Untuk suatu sistem banyak partikel total momentum sudutnya diberikan oleh

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \tag{6.14}$$

dengan $\vec{l}_i$ adalah momentum sudut partikel ke-i. Total torka yang bekerja pada sistem ini

$$\vec{\tau}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{l}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \tau_i \tag{6.15}$$

Torka yang bekerja pada sistem dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, torka internal yang bekerja pada partikel oleh partikel lain dalam sistem, dan torka eksternal yang berasal dari gaya eksternal. Karena prinsip aksi-reaksi, dan bila garis kerja gaya aksi-reaksi tersebut segaris maka total torka antara dua partikel i dan j

$$\tau_{ij} + \tau_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times F_{ij} = 0. \tag{6.16}$$

Sehingga total torka yang bekerja pada sistem partikel hanyalah torka eksternal, dan perubahan momentum sudut total sistem hanya bergantung pada torka eksternal

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\text{ekst tot}} \tag{6.17}$$

Ketika tidak ada torka eksternal maka momentum sudut total sistem akan konstan.

6.4 Energi Kinetik Rotasi

Kita tinjau suatu sistem partikel yang berotasi terhadap suatu sumbu tetap. Jarak setiap partikel terhadapa sumbu rotasi selalu tetap. Bila sistem partikel ini adalah benda tegar maka kesemua partikel akan bergerak bersama-sama dengan kecepatan sudut yang sama. Energi kinetik sistem partikel tersebut adalah

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \Big(\frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\Big)\omega^2 \tag{6.18}$$

dengan r_i adalah jarak partikel ke i tegak lurus terhadap sumbu rotasi. Besaran yang ada dalam tanda kurung didefinisikan sebagai momen inersia I dari sistem relatif terhadap sumbu rotasi

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{6.19}$$

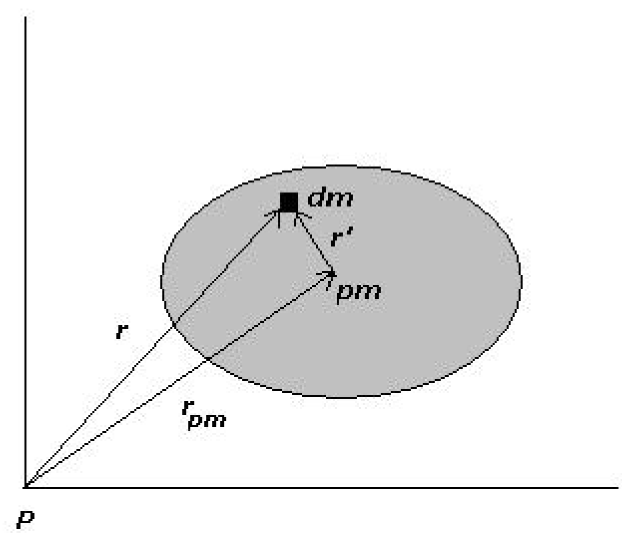
Bila bendanya kontinum, maka perumusan momen inersianya menjadi

$$I = \int r_{\perp}^{2} \mathrm{d}m \tag{6.20}$$

dengan $r_{\perp}$ adalah jarak tegak lurus elemen massa dm ke sumbu putar.

6.4.1 Teorema sumbu sejajar

Tinjau sebuah benda seperti tampak pada gambar di bawah ini



Gambar 6.1: Gambar untuk teorema sumbu sejajar

dengan titik pm adalah titik pusat massanya. Momen inersia benda terhadap sumbu di titik P dan momen inersia terhadap sumbu yang sejajar tetapi melalui titik pusat massanya terkait sebagai berikut

$$I_P = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int \vec{r}_\perp \cdot \vec{r}_\perp \mathrm{d}m \tag{6.21}$$

tetapi $\vec{r}_\perp = \vec{r}_{\text{pm}} + \vec{r}'$ dan

$$\vec{r}_\perp \cdot \vec{r}_\perp = (\vec{r}_{\text{pm}} + \vec{r}') \cdot (\vec{r}_{\text{pm}} + \vec{r}') = r_{\text{pm}}^2 + r'^2 + 2\vec{r}_{\text{pm}} \cdot \vec{r}'$$

sehingga

$$I_P = \int (r_{\text{pm}}^2 + r'^2 + 2\vec{r}_{\text{pm}} \cdot \vec{r}')\mathrm{d}m \tag{6.22}$$

suku pertama tidak lain adalah Mr_{pm}^2 (M adalah massa total benda), suku kedua adalah momen inersia terhadap pusat massa, sedangkan suku ketiga lenyap (karena tidak lain adalah posisi pusat massa ditinjau dari pusat massa). Sehingga

$$I_P = I_{\text{pm}} + Mr_{\text{pm}}^2 \tag{6.23}$$

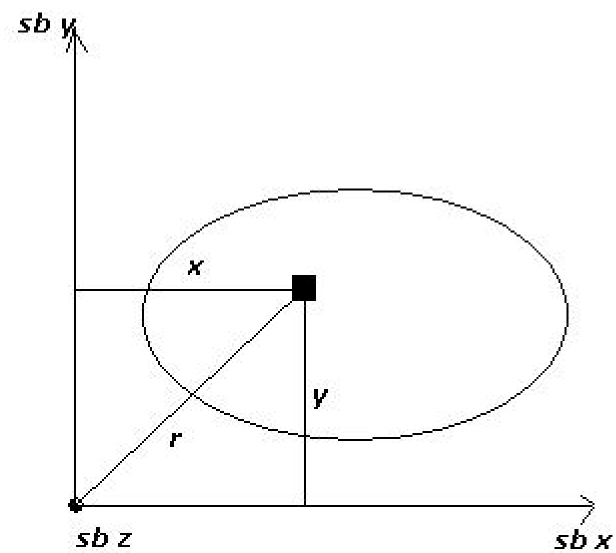
6.4.2 Teorema sumbu tegak lurus

Tinjau benda pada gambar di bawah ini

Kita ketahui bahwa

$$I_z = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = I_y + I_x \tag{6.24}$$

Jadi momen inersia terhadap suatu sumbu sama dengan jumlah momen inersia terhadap dua sumbu yang saling tegak terhadapnya



Gambar 6.2: Gambar untuk teorema sumbu tegak lurus

6.5 Usaha

Definisi usaha untuk gerak rotasi sama dengan definisi usaha pada gerak linear. Sebuah partikel diberi gaya $\vec{F}$. Partikel itu bergerak melingkar dengan lintasan yang berjejari r, menempuh lintasan sepanjang $\mathrm{d}\vec{s}$. Usaha yang dilakukan gaya $\vec{F}$ tadi adalah

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{6.25}$$

Tetapi kita dapat menuliskan $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}$, sehingga

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} = \vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} \tag{6.26}$$

Tetapi usaha yang dilakukan sama dengan perubahan energi kinetik sehingga

$$\vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2) = I\omega\mathrm{d}\omega \tag{6.27}$$

dengan $\mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{d}t$ dan $\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t$ maka

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\omega}\mathrm{d}t = I\vec{\omega} \cdot \vec{\alpha}\mathrm{d}t \tag{6.28}$$

Maka kita peroleh kaitan

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{6.29}$$

analog dengan hukum Newton kedua.

6.6 Gabungan Gerak Translasi dan Rotasi

Tinjau sebuah benda dengan posisi pusat massa $\vec{r}_{\mathrm{pm}}$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_{\mathrm{pm}}$. Misalkan benda ini selain bertranslasi, juga berotasi. Kecepatan suatu bagian dari benda tadi dapat dituliskan sebagai $\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{pm}} + \vec{v}'$, dengan $\vec{v}'$ adalah kecepatan relatif terhadap pusat massa. Sehingga energi kinetik benda tadi

$$E_k = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int (\vec{v}_{\mathrm{pm}} + \vec{v}') \cdot (\vec{v}_{\mathrm{pm}} + \vec{v}')\mathrm{d}m \tag{6.30}$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{1}{2}\int(v_{\text{pm}}^2 + \vec{v}'^2 + 2\vec{v}_{\text{pm}} \cdot \vec{v}')\text{d}m \tag{6.31}$$

suku terakhir lenyap (karena merupakan kecepatan pusat massa dilihat dari kerangka pusat massa). Sehingga

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{\text{pm}}^2 + E'_{k\text{pm}} \tag{6.32}$$

dengan $E'_{k\text{pm}}$ adalah energi kinetik benda karena gerak relatifnya terhadap pusat massa. Bila bendanya benda tegar, maka suku terakhir ini adalah energi kinetik rotasi terhadap pusat massa

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{\text{pm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{pm}}\omega^2 \tag{6.33}$$

6.7 Kesetimbangan Benda Tegar

Sebuah benda tegar berada dalam keadaan seimbang mekanis bila, relatif terhadap suatu kerangka acuan inersial

1. Percepatan linier pusat massanya nol.

2. Percepatan sudutnya mengelilingi sembarang sumbu tetap dalam kerangka acuan ini juga nol.

Persyaratan di atas tidak mengharuskan benda tersebut dalam keadaan diam, karena persyaratan pertama membolehkan benda bergerak dengan kecepatan pusat massanya konstan, sedangkan persyaratan kedua membolehkan benda berotasi dengan kecepatan sudut rotasi yang konstan juga. Bila benda benar-benar diam (relatif terhadap suatu kerangka acuan), yaitu ketika kecepatan linier pusat massanya dan kecepatan sudut rotasinya terhadap sembarang sumbu tetap, bernilai nol keduanya, maka benda tegar tersebut dikatakan berada dalam keseimbangan statik. Bila suatu benda tegar berada dalam keadaan seimbang statik, maka kedua persyaratan di atas untuk keseimbangan mekanik akan menjamin benda tetap dalam keadaan seimbang statik.

Persyaratan pertama ekuivalen dengan persyaratan bahwa total gaya eksternal yang bekerja pada benda tegar sama dengan nol

$$\vec{F}_{\text{eks}} = 0. \tag{6.34}$$

Sedangkan persyaratan kedua ekuivalen dengan persyaratan bahwa total torka eksternal yang bekerja pada benda tegar sama dengan nol

$$\vec{\tau}_{\text{eks}} = 0. \tag{6.35}$$

6.8 Jenis-Jenis Keseimbangan

Dalam kasus ini yang akan ditinjau hanyalah keseimbangan benda tegar di dalam pengaruh gaya eksternal yang konservatif. Karena gayanya adalah gaya konservatif, maka terdapat hubungan antara gaya yang bekerja dengan energi potensialnya, misalnya untuk satu arah-x

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.36}$$

Keadaan seimbang terjadi ketika nilai $F_x = 0$, kondisi ini tidak lain adalah syarat titik ekstrem untuk fungsi energi potensial $U(x)$. Andaikan saja titik seimbang ini kita pilih sebagai posisi $x = 0$. Fungsi energi potensial dapat diekspansikan (sebagai deret pangkat dalam x) di sekitar titik ini

$$U(x) = U_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{6.37}$$

Karena

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = 0 \tag{6.38}$$

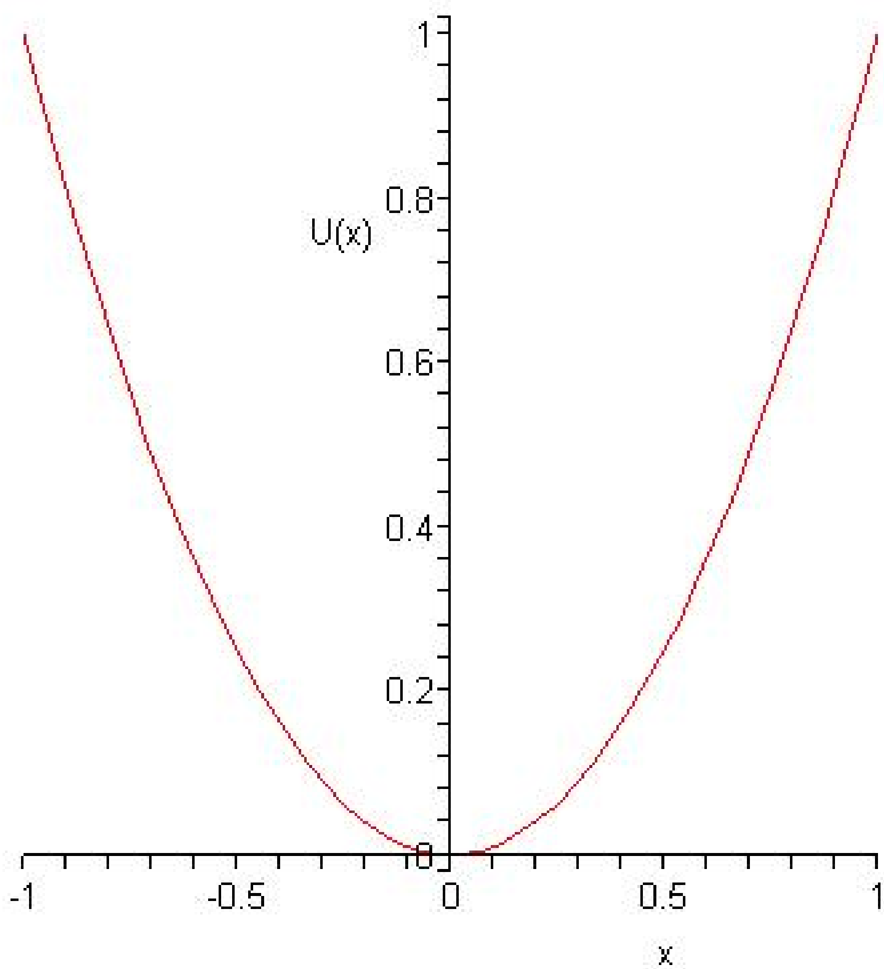
maka $a_1 = 0$. Gaya yang bekerja pada benda ketika digeser dari titik kesetimbangannya, tergantung pada nilai a_2,

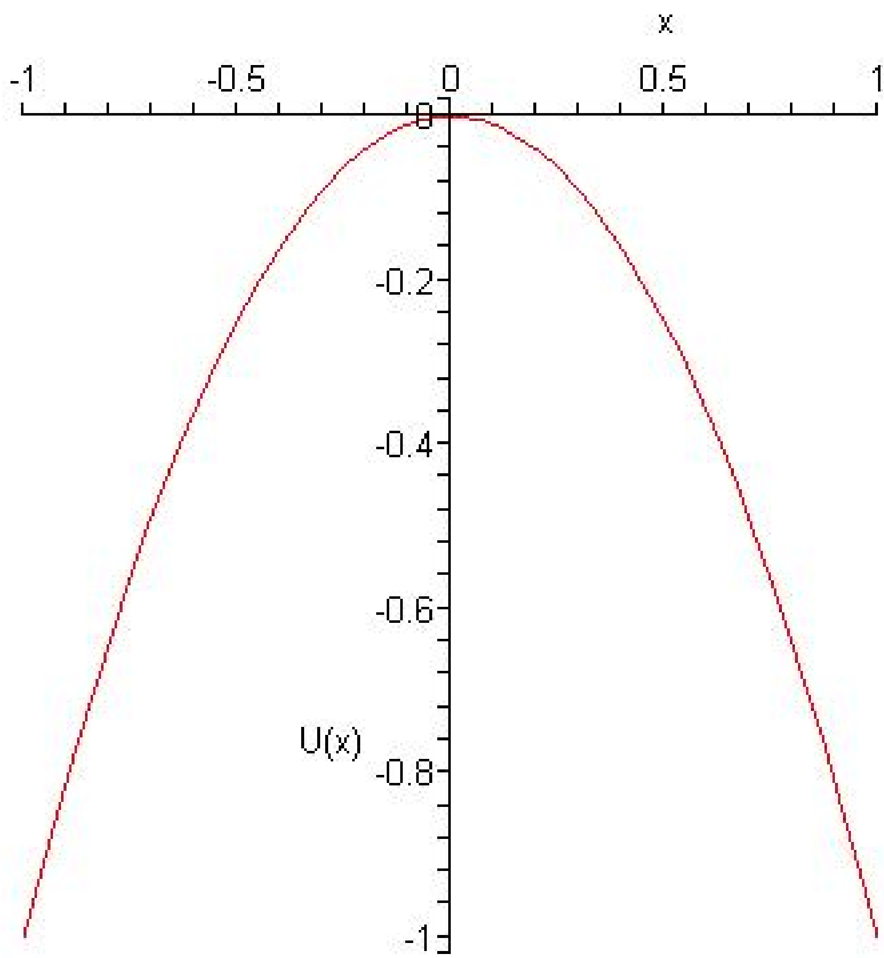
$$F_x = -2a_2 x - 3a_3 x^2 + \ldots \tag{6.39}$$

Untuk nilai x disekitar $x = 0$, F_x dapat didekati hanya dengan suku pertamanya, sehingga

$$F_x \approx -2a_2 x \tag{6.40}$$

Bila $a_2 > 0$ maka pergeseran kecil dari titik seimbang, memunculkan gaya yang mengarahkan kembali ke titik seimbang. Keseimbangan ini disebut keseimbangan stabil. Bila $a_2 > 0$ maka pergeseran sedikit dari titik seimbang, memunculkan gaya yang menjauhkan dari titik seimbangnya. Keseimbangan ini disebut keseimbangan labil. Bila $a_2 = 0$ maka pergeseran sedikit dari titik seimbang tidak memunculkan gaya. Keseimbangan ini disebut keseimbangan netral.


1
0.8
U(x)
0.6
0.4
0.2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
x


x
-1
-0.5
0
0.5
1
0
-0.2
-0.4
-0.6
U(x)
-0.8
-1

Bab 7

GRAVITASI

Hukum gravitasi universal yang dirumuskan oleh Newton, diawali dengan beberapa pemahaman dan pengamatan empiris yang telah dilakukan oleh ilmuwan-ilmuwan sebelumnya. Mula-mula Copernicus memberikan landasan pola berfikir yang tepat tentang pergerakan planet-planet, yang semula dikira planet-planet tersebut bergerak mengelilingi bumi, seperti pada konsep Ptolemeus. Copernicus meletakkan matahari sebagai pusat pergerakan planet-planet, termasuk bumi, dalam gerak melingkarnya. Kemudian dari data hasil pengamatan yang teliti tentang pergerakan planet, yang telah dilakukan Tycho Brahe, Kepler merumuskan tiga hukum empiris yang dikenal sebagai hukum Kepler mengenai gerak planet:

1. Semua planet bergerak dalam lintasan berbentuk elips dengan matahari pada salah satu titik fokusnya.

2. Garis yang menghubungkan planet dengan matahari akan menyapu

daerah luasan yang sama dalam waktu yang sama.

3. Kuadrat perioda planet mengelilingi matahari sebanding dengan pangkat tiga jarak rerata planet ke matahari.

Hukum-hukum Kepler ini adalah hukum empiris. Keplet tidak mempunyai penjelasan tentang apa yang mendasari hukum-hukumnya ini. Kelebihan Newton, adalah dia tidak hanya dapat menjelaskan apa yang mendasari hukum-hukum Kepler ini, tetapi juga menunjukkan bahwa hukum yang sama juga berlaku secara universal untuk semua benda-benda bermassa.

7.1 Hukum Gravitasi Universal

Kita dapat menjabarkan, dengan cara yang sederhana, hukum gravitasi universal dengan memulainya dari fakta-fakta empiris yang telah ditemuka Kepler. Untuk memudahkan analisa kita anggap bahwa planet-planet bergerak dalam lintasan yang berbentuk lingkaran dengan jejari r, dengan kelajuan konstan v.

Karena planet bergerak dalam lintasan lingkaran maka planet mengalami percepatan sentripetal yang besarnya diberikan oleh

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2} \tag{7.1}$$

dengan T adalah periode planet mengelilingi matahari. Percepatan ini tentunya disebabkan oleh suatu gaya yang mengarah ke pusat lingkaran (ke matahari). Besar gaya ini tentunya sama dengan massa planet m dikali percepatan sentripetalnya, sehingga besar gaya tadi dapat dirumuskan sebagai

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{7.2}$$

Hukum Kepler ketiga dapat kita tuliskan sebagai

$$T^2 = kr^3 \tag{7.3}$$

dengan k adalah suatu konstanta kesebandinga. Dengan persamaan hukum Kepler ketiga ini, besar gaya pada pers. (7.2) dapat ditulis sebagai

$$F = m\frac{4\pi^2}{kr^2} = k'\frac{m}{r^2} \tag{7.4}$$

dengan k' adalah suatu konstanta. Karena gaya ini mengarah ke pusat lingkaran, yaitu ke matahari, tentunya logis bila dianggap bahwa gaya tersebut disebabkan oleh matahari.

Berdasarkan hukum ketiga Newton, tentunya akan ada gaya juga yang bekerja pada matahari oleh planet, yang besarnya sama dengan gaya di pers. (7.4). Tetapi karena sekarang bekerja pada matahari, tentunya konstanta k' di pers. (7.4) mengandung massa matahari M sehingga logis bila diasumsikan bahwa terdapat gaya yang saling tarik menarik antara planet dan matahari yang besarnya diberikan oleh

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{7.5}$$

Newton, setelah mengamati hal yang sama pada bulan dan pada benda-benda yang jatuh bebas di permukaan bumi, menyimpulkan bahwa gaya tarik menarik tadi berlaku secara universal untuk sembarang benda. Gaya tadi kemudian dinamai sebagai gaya gravitasi. Jadi antara dua benda bermassa m_1 dan m_2 yang terpisah sejauh r terdapat gaya gravitasi yang perumusannya diberikan oleh

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12} \tag{7.6}$$

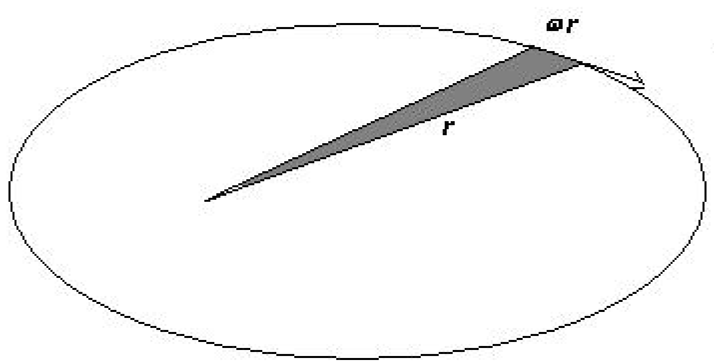
dengan $\hat{r}_{12}$ adalah vektor satuan yang berarah dari benda pertama ke benda kedua. (Notasi 12, berarti pada benda pertama oleh benda kedua).

Konstanta G dalam persamaan gravitasi universal, dapat ditentukan melalui eksperimen. Pengukuran yang teliti untuk nilai G dilakukan oleh Cavendish. Sekarang nilai konstanta gravitasi universal diberikan oleh

$$G = 6,6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 \tag{7.7}$$

Dalam penjabaran di atas, diasumsikan bahwa benda pertama dan kedua adalah suatu titik massa. Untuk benda yang besar, yang tidak dapat dianggap sebagai titik massa maka sumbangan dari masing-masing elemen massa harus diperhitungkan. Untuk itu diperlukan perhitungan-perhitungan kalkulus integral. Salah satu hasil capaian Newton, dia berhasil menunjukkan, dengan bantuan kalkulus integral, bahwa sebuah benda berbentuk bola (juga kulit bola) dengan distribusi massa yang homogen, akan memberikan gaya gravitasi ada sebuah titik massa di luar bola tadi dengan massa bola seolah-olah terkonsentrasi pada titik pusat bola. Dengan ini kita dapat misalnya menganggap gaya gravitasi bumi seolah-olah disebabkan oleh sebuah titik massa yang berada pada pusat bumi.

Hukum Kepler kedua, untuk kasus lintasan planet yang berbentuk lingkaran, hanya menunjukkan bahwa kelajuan planet mengelilingi matahari konstan. Tetapi untuk kasus lintasan yang sesungguhnya, yaitu yang berbentuk elips, hukum kedua Kepler menunjukkan tentang kekekalan momentum sudut. Lihat gambar



Daerah yang disapu oleh garis yang menghubungkan planet dengan matahari dalam suatu selang waktu Δt diberikan oleh

$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \omega \Delta t \tag{7.8}$$

sehingga pernyataan bahwa untuk selang waktu yang sama daerah yang disapu sama, sama dengan menyatakan bahwa besaran berikut ini konstan

$$\frac{\omega^2}{r} \tag{7.9}$$

Tetapi bila ini kita kalikan dengan massa planet, akan kita dapatkan bahwa besaran $m\omega r^2$ yang tidak lain sama dengan besar total momentum sudut sistem (dengan matahari sebagai titik referensi). Jadi dalam sistem planet matahari, gaya gravitasi tidak menimbulkan perubahan momentum sudut.

7.2 Medan Gravitasi

Konsep gaya gravitasi, dimana dua benda yang terpisah dan tidak saling sentuh dapat memeberikan pengaruh satu sama lain, merupakan konsep yang sulit dipahami bagi ilmuwan fisika klasik dahulu. Bagi mereka semua gaya harus melalui persentuhan, minimal harus ada perataranya. Karena itu terkait dengan gaya gravitasi, mereka memperkenalkan konsep medan gravitasi. Jadi pada ruang di sekitar sebuah benda yang bermassa m akan timbul medan gravitasi. Apabila pada medan gravitasi tadi terdapat sebuah benda yang bermassa, maka benda tadi akan mengalami gaya gravitasi. Kuat medan gravitasi pada suatu titik dalam ruang diukur dengan menggunakan suatu massa uji yang kecil. Kuat medan gravitas diberikan oleh perumusan

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{7.10}$$

sehingga medan gravitasi di sekitar sebuah benda bermassa m diberikan oleh

$$\vec{g} = G\frac{m}{r^2}\hat{r} \tag{7.11}$$

7.3 Energi Potensial Gravitasi

Usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi sebuah benda bermassa M (yang diasumsikan berada di titik pusat koordinat) pada benda lain yang bermassa m, yang menyebabkan perpindahan benda kedua dari jarak r_a ke r_b diberikan oleh

$$W = \int_a^b -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_a^b G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = GMm\Big(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\Big) \tag{7.12}$$

Tanda minus dalam gaya di atas karena arah gayanya adalah ke pusat koordinat. Jelas dari hasil di atas bahwa gaya gravitasi adalah gaya konservatif. Karena itu kita dapat mendefinisikan konsep energi potensial gravitasi melalui

$$\Delta U = -W = -GMm\Big(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\Big) \tag{7.13}$$

Bila kita asumsikan r_a berada pada jauh tak hingga, dan $r_b = r$, dan diasumsikan pada titik jauh tak hingga potensial gravitasinya lenyap (=nol), maka kita dapatkan

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{7.14}$$

Untuk suatu ketiggian dekat permukaan bumi, maka kita pilih pada pers. (7.13) $r_a = R$, jejari bumi (= jarak permukaan bumi dari pusatnya), dan $r_b = R + h$. Kemudian diasumsikan bahwa $U(R) = 0$, maka kita peroleh energi potensial gravitasinya

$$U(r) = -GMm\Big(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\Big) = -GMm\Big(\frac{R-(R+h)}{(R+h)R}\Big) \approx \frac{GM}{R^2}mh \tag{7.15}$$

Tetapi besaran GM/R^2 tidak lain dari percepatan gravitasi bumi g, sehingga untuk ketingggian dekat permukaan bumi

$$U(h) = mgh \tag{7.16}$$

Bab 8

FLUIDA

Dalam bagian ini kita mengkhususkan diri pada materi yang memiliki keadaan khusus. Bila sebelumnya kita pernah membahas materi atau benda tegar, di mana jarak relatif antara bagian-bagian atau partikel-partikel penyusun materi tetap, maka sekarang kita meninjau kasus kebalikannya, yaitu kasus di mana jarak relatif antara bagian-bagian materi atau partikel-partikel penyusun materi dapat berubah-ubah. Materi yang berada dalam keadaan ini disebut sebagai fluida, dapat berupa cairan maupun gas, dan dinamai fluida karena memiliki sifat dapat mengalir. Karena partikel-partikel dalam fluida dapat mudah bergerak, maka secara umum rapat massanya tidak konstan. Walaupun begitu dalam buku ini, dalam kebanyakan kasus kita hanya akan meninjau keadaan dengan kerapatan konstan. Kita akan mempelajari fenomena-fenomena fisis dari fluida, khususnya terkait dengan sifatnya yang dapat mengalir.

8.1 Tekanan

Sebuah gaya yang bekerja pada sebuah permukaan fluida akan selalu tegak lurus pada permukaan tersebut. Karena fluida yang diam tidak dapat menahan komponen gaya yang sejajar dengan permukaannya. Komponen gaya yang sejajar dengan permukaan fluida akan menyebabkan fluida tadi bergerak mengalir. Karena itu kita dapat mendefinisikan suatu besaran yang terkait dengan gaya normal permukaan dan elemen luasan permukaan suatu fluida.

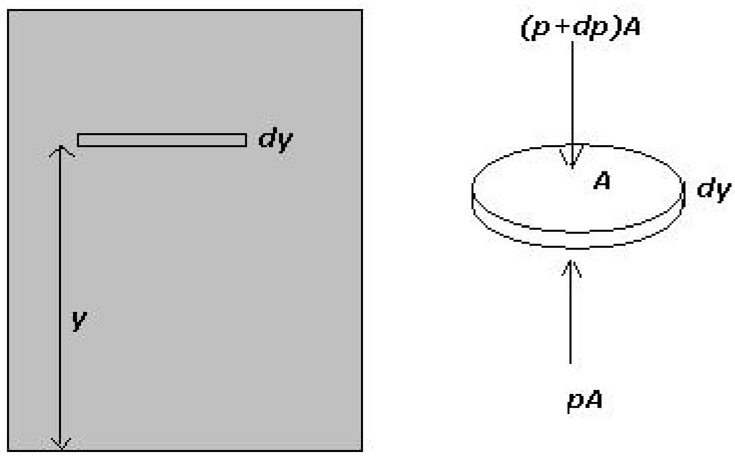
Kita tinjau suatu fluida, dan kita ambil suatu bagian volume dari fluida itu dengan bentuk sembarang, dan kita beri nama S. Secara umum akan terdapat gaya dari luar S pada permukaannya oleh materi di luar S. Sesuai prinsip hukum Newton ketiga, mestinya akan ada gaya dari S yang, sesuai pembahasan di atas, mengarah tegak lurus pada permukaan S. Gaya tadi diasumsikan sebanding dengan elemen luas permukaan $\mathrm{d}\vec{S}$, dan konstanta kesebandingannya didefinisikan sebagai tekanan

$$\vec{F} = p\mathrm{d}\vec{S} \tag{8.1}$$

Jadi arah $\vec{F}$ adalah tegak lurus permukaan, searah dengan arah $\mathrm{d}\vec{S}$, dan tekanan p adalah besaran skalar. Satuan SI dari tekanan adalah pascal (Pa), dan 1 Pa = 1 N/m^2.

8.2 Tekanan Hidrostatik

Dalam suatu fluida yang diam, setiap bagian dari fluida itu berada dalam keadaan kesetimbangan mekanis. Kita tinjau sebuah elemen berbentuk cakram pada suatu fluida yang berjarak y dari dasar fluida, dengan ketebalan cakram dy dan luasnya A (lihat gambar).



Total gaya pada elemen cakram tadi harus sama dengan nol. Untuk arah horizontal gaya yang bekerja hanyalah gaya tekanan dari luar elemen cakram, yang karena simetri haruslah sama. Untuk arah vertikal, selain gaya tekanan yang bekerja pada permukaan bagian atas dan bagian bawah, juga terdapat gaya berat, sehingga

$$pA - (p + \mathrm{d}p)A - \mathrm{d}w = 0 \tag{8.2}$$

dengan $\mathrm{d}w = \rho g A \mathrm{d}y$ adalah elemen gaya berat. Kita dapatkan

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g \tag{8.3}$$

Persamaan ini memberikan informasi bagaimana tekanan dalam fluida berubah dengan ketinggian sebagai akibat adanya gravitasi.

Tinjau kasus khusus bila fluidanya adalah cairan. Untuk cairan, pada rentang suhu dan tekanan yang cukup besar, massa jenis cairan ρ dapat dianggap tetap. Untuk kedalaman cairan yang tidak terlalu besar kita dapat asumsikan bahwa percepatan gravitasi g konstan. Maka untuk sembarang dua posisi ketinggian y_1 dan y_2, kita dapat mengintegrasikan persamaan di atas

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = -\rho g \int_{y1}^{y2} \mathrm{d}y \tag{8.4}$$

atau

$$p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \tag{8.5}$$

Bila kita pilih titik y_2 adalah permukaan atas cairan, maka tekanan yang beraksi di permukaan itu adalah tekanan udara atmosfer, sehingga

$$p = p_0 + \rho g h \tag{8.6}$$

dengan $h = (y_2 - y_1)$ adalah kedalaman cairan diukur dari permukaan atas. Untuk kedalaman yang sama tekanannya sama.

Kasus lain adalah bila fluidanya adalah gas, atau lebih khusus lagi bila fluidanya adalah udara atmosfer bumi. Sebagai titik referensi adalah permukaan laut (ketinggian nol), dengan tekanan p_0 dan massa jenis ρ_0. Kita asumsikan gasnya adalah gas ideal yang mana massa jenisnya sebanding dengan tekanan, sehingga

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \tag{8.7}$$

Dengan memakai pers. (8.3), maka

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} \tag{8.8}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\mathrm{d}y \tag{8.9}$$

yang bila diintegralkan akan menghasilkan

$$p = p_0 e^{-g(\rho_0/p_0)} y \tag{8.10}$$

8.3 Prinsip Pascal dan Archimedes

Untuk suatu cairan dalam wadah tertutup, tetap berlaku pers. (8.5). Karena itu bila terjadi perubahan tekanan ada titik 1 sebesar Δp_1, maka

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 - g(y_2 - y_1)\Delta\rho \tag{8.11}$$

Tetapi untuk cairan perubahan rapat massanya dapat diabaikan $\Delta\rho \approx 0$, sehingga $\Delta p_2 = \Delta p_1$. Ini berarti tekanan yang diberikan pada titik 1 akan diteruskan tanpa pengurangan ke sembarang titik dalam cairan tersebut. Inilah yang dikenal sebagai prinsip Pascal. Prinsip ini hanya konsekuensi dari persamaan tekanan hidrostatika.

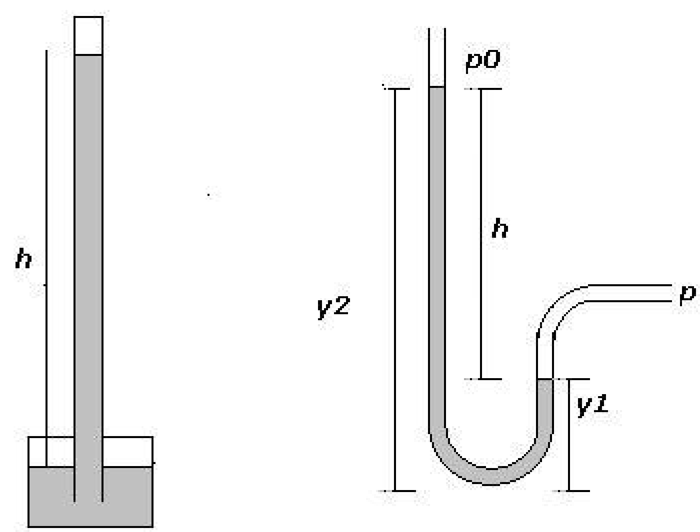
Kita tinjau sebuah benda yang tercelup kedalam suatu fluida. Fluida tadi akan memberikan faya tekanan kepada setiap bagian permukaan benda. Gaya tekan pada bagian yang lebih dalam tentunya lebih besar (karena tekanannya lebih besar). Karena itu total gaya tekan yang bekerja pada seluruh permukaan benda tadi akan menimbulkan total gaya ke atas. Besar gaya ke atas tadi bisa diperoleh sebagai berikut. Seandainya pada tempat benda tadi digantikan dengan fluida yang sama dengan lingkungannya, maka tentunya akan berada dalam keadaan kesetimbangan. Sehingga total gaya ke atas tadi tentunya sama dengan berat fluida yang menggantikan benda tadi. Prinsip ini terkenal sebagai prinsip Archimedes. Jadi pada sebuah benda yang tercelup ke dalam suatu fluida akan terdapat total gaya ke atas (gaya apung) yang besarnya sama dengan berat fluida yang ditempati benda tadi.

8.4 Pengukuran Tekanan

Tekanan udara diukur dengan menggunakan alat yang diberinama barometer. Barometer yang pertama kali dibuat adalah barometer air raksa, buatan Torriclelli. Dari gambar jelas bahwa tekanan udara akan sama dengan tekanan titik P pada air raksa. Bagian atas dari kolom air raksa terdapat uap air raksa yang tekanannya dapat diabaikan. Sehingga tekanan udara diberikan oleh

$$p = \rho_m g h \tag{8.12}$$

dengan ρ_m adalah rapat massa air raksa.



Gambar 8.1: Barometer dan Manometer

Alat ukur tekanan yang lain adalah manometer air raksa (Lihat gambar). Tekanan dalam tabung daat dicari dengan menggunakan pers. (**??**)

$$p = p_0 + \rho_m g h \tag{8.13}$$

8.5 Jenis-Jenis Aliran Fluida

Pada bagian ini kita akan meninjau kasus fluida bergerak/mengalir. Normalnya, ketika kita meninjau keadaan gerak dari suatu sistem partikel, kita akan berusaha memberikan informasi mengenai posisi dari setiap partikel sebagai fungsi waktu. Tetapi untuk kasus fluida ada metode yang lebih mudah yang dikembangkan mula-mula oleh Euler. Dalam metode ini kita tidak mengikuti pergerakan masing-masing partikel, tetapi kita memberi informasi mengenai keadaan fluida pada setiap titik ruang dan waktu. Keadaan fluida pada setiap titik ruang dan untuk seluruh waktu diberikan oleh informasi mengenai massa jenis $\rho(\vec{r}, t)$ dan kecepatan fluida $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Aliran fluida dapat dikategorikan menurut beberapa kondisi

1. Bila vektor kecepatan fluida di semua titik $\vec{v} = \vec{(}\vec{r})$ bukan merupakan fungsi waktu maka alirannya disebut aliran tetap (steady), sebaliknya bila tidak maka disebut aliran tak tetap (non steady).

2. Bila di dalam fluida tidak ada elemen fluida yang berotasi relatif terhadap suatu titik maka aliran fluidanya disebut alira irrotasional, sedangkan sebaliknya disebut aliran rotasional.

3. Bila massa jenis ρ adalah konstan, bukan merupakan fungsi ruang dan waktu, maka alirannya disebut aliran tak termampatkan, sebaliknya akan disebut termampatkan.

4. Bila terdapat gaya gesek dalam fluida maka alirannya disebut aliran

kental, sedangkan sebaliknya akan disebut aliran tak kental. Gaya gesek ini merupakan gaya-gaya tangensial terhadap lapisan-lapisan fluida, dan menimbulkan disipasi energi mekanik.

8.6 Persamaan Kontinuitas

Tinjau suatu bagian berbentuk sembarang O dari suatu fluida yang mengalir. Misalkan dalam bagian tersebut terdapat suatu sumber (bila bernilai positif) atau bocoran (bila bernilai negatif), kita lambangkan dengan S yang memberi (kelajuan) jumlah massa yang terbentuk atau hilang di O per satuan waktu. Seandainya tidak ada perubahan massa menjadi energi (total massa kekal/konstan), maka total massa fluida per satuan waktu yang masuk ke O dikurangi massa yang keluar dari O harus sama dengan S. Total massa yang masuk maupun keluar dapat dicari dengan menghitung fluks aliran yang menembus permukaan O. Sebelumnya kita definisikan dulu rapat arus fluida sebagai perkalian antara rapat massa dan kecepatan fluida di suatu titik ruang waktu,

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{8.14}$$

Bila rapat arus fluida dikalikan skalar dengan elemen luas permukaan $\mathrm{d}\vec{A}$ maka akan didapatkan

$$\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \rho\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \tag{8.15}$$

Untuk setiap satuan waktu dt maka

$$\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \rho \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \rho \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{8.16}$$

suku terakhir adalah laju perubahan massa yang memasuki O. Bila dalam O tidak terdapat sumber maka jumlah massa yang sama harus keluar dari O, tetapi bila ada sumber berarti selisih laju perubahan massa yang masuk dan keluar sama dengan S

$$-\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + S = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{8.17}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$-\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + S = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{8.18}$$

Kita tinjau kasus khusus dengan kecepatan fluida tidak bergantung waktu dan dapat dianggap sama untuk titik-titik permukaan yang tidak terlalu besar. Kita ambil O berbentuk tabung aliran dengan dua buah permukaan sisi tutupnya A_1 dan A_2. Dari pers. (8.16), dapat diperoleh bahwa total massa yang masuk pada permukaan A_1 dan yang keluar pada A_2 dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{A}_1 \tag{8.19}$$

dan

$$\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{A}_2 \tag{8.20}$$

Bila tidak ada sumber maka kedua nilai tadi harus sama, jadi

$$\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{A}_1 = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{A}_2 \tag{8.21}$$

Persamaan ini juga sering disebut sebagai persamaan kontinuitas, walau sebenarnya hanya merupakan kasus khusus saja.

8.7 Persamaan Bernoulli

Persamaan Bernoulli sebenarnya hanya bentuk lain dari persamaan kekekalan energi mekanik yang diterapkan pada fluida. Tentunya fluida yang ditinjau harus tak kental agar tidak terdapat disipasi energi sebagai panas. Lihat gambar di bawah ini,

Sesuai dengan teorema usaha-energi kita ketahui bahwa usaha oleh gaya non konservatif sama dengan perubahan energi mekanik.

$$W_{\mathrm{nk}} = \Delta E_m \tag{8.22}$$

Dalam kasus di atas, usaha non konservatifnya dilakukan oleh gaya tekanan. Usaha totalnya adalah

$$W_{\mathrm{nk}} = (p_1 A_1 v_1 - p_2 A_2 v_2)\Delta t \tag{8.23}$$

Sedangkan perubahan energi mekaniknya adalah

$$\frac{1}{2}(\rho_2 A_2 v_2 \Delta t)v_2^2 + g(\rho_2 A_2 v_2 \Delta t)y_2 - \frac{1}{2}(\rho_1 A_1 v_1 \Delta t)v_1^2 - g(\rho_1 A_1 v_1 \Delta t)y_1 \quad (8.24)$$

sehingga

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t + \frac{1}{2}(\rho_1 A_1 v_1 \Delta t)v_1^2 + g(\rho_1 A_1 v_1 \Delta t)y_1 = p_2 A_2 v_2 \Delta t + \frac{1}{2}(\rho_2 A_2 v_2 \Delta t)v_2^2 + g(\rho_2 A_2 v_2 \Delta t)y_2 \quad (8.25)$$

Tetapi dari persamaan kontinuitas diketahui $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$, dan bila diasumsikan bahwa $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ maka

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (8.26)$$

atau

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{konstan} \quad (8.27)$$

Inilah persamaan Bernoulli.

Bab 9

GETARAN DAN GELOMBANG

9.1 GETARAN

Getaran adalah salah satu bentuk gerak yang khusus. Kita hanya akan meninjau getaran atau osilasi yang sederhana. Untuk itu kita akan meninjau energi potensial yang dimiliki sebuah partikel bermassa m yang berada dalam keadaan kesetimbangan stabil di sekitar titik 0. Secara umum bentuk energi potensialnya adalah

$$U = U_0 - ax^2 + O(x^3) \tag{9.1}$$

dengan $O(x^3)$ adalah suku-suku energi potensial dengan variabel x berpangkat tiga atau lebih, yang tentunya harus sangat kecil dibandingkan suku pangkat duanya (bila tidak maka bukan kesetimbangan stabil). Gaya yang terkait dengan energi potensial ini dapat dicari dari

$$F_x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}U \tag{9.2}$$

atau

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -2ax + O(x^2) \tag{9.3}$$

bila suku gaya pangkat dua atau lebih sangat kecil atau dapat diabaikan, maka ini tidak lain dari gaya pegas, dan dengan $2a = k$ maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{9.4}$$

atau

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{9.5}$$

Persamaan ini memiliki bentuk penyelesaian umum

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{9.6}$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.7}$$

adalah frekuensi sudut dari getaran. Persamaan di (9.6) dapat dituliskan juga sebagai

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi) = A_0(\sin\omega t \cos\phi + \cos\omega t \sin\phi) \tag{9.8}$$

dengan $A = A_0 \cos\phi$ dan $B = A_0 \sin\phi$, (sehingga $\phi = \arcsin B/A$ yang disebut sebagai fase getaran), dan A_0 disebut sebagai amplitudo getaran. Getaran yang memenuhi persamaan (9.5) disebut sebagai getaran selaras sederhana.

Berikut ini beberapa contoh getaran selaras sederhana

9.1.1 Bandul

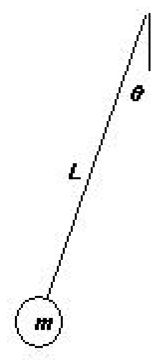
Sebuah bandul yang berada dalam medan potensial gravitasi, bila disimpangkan tidak jauh dari titik keseimbangannya akan mengalami gerak getaran. Lihat gambar di bawah ini

Komponen gaya yang dialami bandul bermassa m yang sejajar dengan arah geraknya adalah

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - mg\sin\theta \tag{9.9}$$

Tanda negatif karena arah gaya berlawanan dengan arah simpangan positif x. Untuk simpangan yang tidak terlalu besar, $\sin\theta$ dapat kita dekati sebagai $\sin\theta \approx \theta$ (dalam radian) dan $x \approx L\theta$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{9.10}$$



Gambar 9.1: Bandul

yang merupakan persamaan getaran selaras sederhana dengan frekuensi

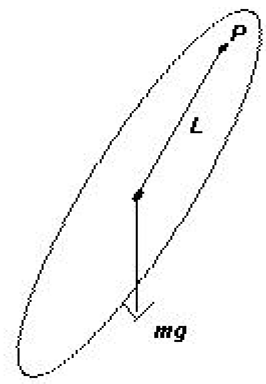
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{9.11}$$

9.1.2 Bandul Mekanis

Sebuah benda digantung pada titik P dan memiliki momen inersia terhadap sumbu P sebesar I_P.

Benda ini disimpangkan dari titik seimbangnya dan kemudian bergetar. Torka yang dialami benda tadi, akibat gaya gravitasi yang bekerja pada titik pusatnya dapat dituliskan sebagai

$$\tau = I_P\alpha = I_P\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -MgL\sin\theta \tag{9.12}$$



Gambar 9.2: Bandul mekanik

Untuk sudut yang cukup kecil $\sin\theta \approx \theta$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{MgL}{I_P}\theta = 0 \tag{9.13}$$

Penyelesaian persamaan ini adalah suatu getaran selaras sederhana dengan frekuensi sudut

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_P}} \tag{9.14}$$

9.2 Getaran Teredam dan Resonansi

Dalam kenyataan di alam, selain gaya yang menimbulkan getaran juga terdapat gaya yang menghambat gerak getaran. Sehingga semua gerak getaran akhirnya berkurang energinya dan berhenti bergetar. Sebagai model sederhana kita asumsikan getaran teredam dengan gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan benda, sehingga persamaan gerak benda dapat ditulis sebagai

$$F = -kx - bv \tag{9.15}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{9.16}$$

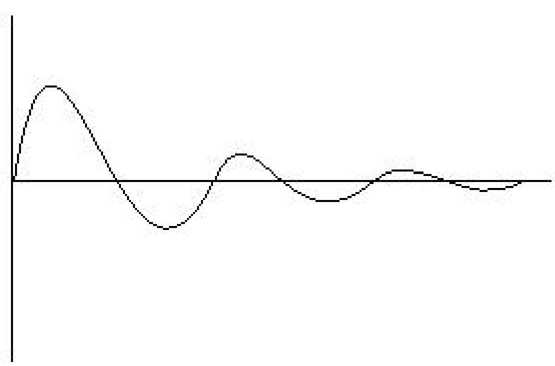
Penyelesaian persamaan di atas ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$x = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \tag{9.17}$$

dengan

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \tag{9.18}$$

Bentuk grafik getarannya sebagai berikut



Gambar 9.3: Getaran teredam

9.2.1 Resonansi

Terkadang suatu sistem yang dapat bergetar mendapat gaya yang juga periodik. Dalam kasus ini benda akan bergetar dengan amplitudo yang besar ketika frekuensi alaminya sama dengan frekuensi gaya eksternal periodiknya. Sebagai model misalkan gaya eksternal periodiknya diberikan oleh $F = F_r \cos\omega'' t$, sehingga persamaan geraknya (dengan mengikutsertakan faktor redaman)

$$F = -kx - bv + F_r \cos\omega'' t \tag{9.19}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = F_r \cos\omega'' t \tag{9.20}$$

Dari persamaan di atas, tentunya logis bila getarannya harus memiliki frekuensi yang sama dengan frekuensi getaran gaya eksternal periodik ω'', tetapi mungkin terdapat beda fase. Dapat ditunjukkan bahwa penyelesaian persamaan di atas adalah

$$x = \frac{F_r}{G}\sin(\omega'' t + \phi) \tag{9.21}$$

dengan

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \tag{9.22}$$

dan

$$\phi = \arccos\frac{b\omega''}{G} \tag{9.23}$$

Tampak bahwa nilai G akan minimum dan amplitudo akan maksimum ketika $\omega = \omega''$. Peristiwa inilah yang biasa disebut resonansi.

9.3 Energi Getaran

Energi potensial sebuah sistem pegas diberikan oleh

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{9.24}$$

sedangkan energi kinetiknya diberikan oleh

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{9.25}$$

maka dengan

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \tag{9.26}$$

dan

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{9.27}$$

maka energi total mekanik sistem pegas yang bergetar diberikan oleh

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \tag{9.28}$$

9.4 GELOMBANG

Gelombang adalah getaran yang merambat. Jadi di setiap titik yang dilalui gelombang terjadi getaran, dan getaran tersebut berubah fasenya sehingga tampak sebagai getaran yang merambat. Terkait dengan arah getar dan arah rambatnya, gelombang dibagi menjadi dua kelompok, geklombang transversal dan gelombang longitudinal. Gelombang transversal arah rambatnya tegak lurus dengan arah getarannya, sedangkan gelombang longitudinal arah rambatnya searah dengan arah getarannya.

Persamaan gelombang memenuhi bentuk

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{9.29}$$

Bentuk umum penyelesaian persamaan di atas adalah semua fungsi yang berbentuk $x(z,t) = x(z \pm vt)$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan mudah. Bentuk yang cukup sederhana yang menggambarkan gelombang sinusoidal adalah penyelesaian yang berbentuk

$$x(z,t) = A\sin(kz \pm \omega t + \phi) \tag{9.30}$$

Untuk suatu waktu t tertentu (misalkan $t = 0$, dan pilih $\phi = 0$) maka

$$x(z,t) = A\sin(kz) \tag{9.31}$$

Ini adalah persamaan sinusoidal dengan jarak dari satu fase ke fase berikutnya diberikan oleh

$$z \equiv \lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{9.32}$$

atau berarti

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{9.33}$$

Bilangan k ini menunjukkan jumlah gelombang atau bilangan gelombang per 2π satuan panjang.

Untuk suatu posisi tertentu (misalkan $z = 0$, dan pilih $\phi = 0$) maka

$$x(z, t) = -A \sin(\omega t) \tag{9.34}$$

Ini adalah persamaan getaran sinusoidal di suatu titik. Periode getarnya diberikan oleh

$$t \equiv T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9.35}$$

atau berarti

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{9.36}$$

dengan f adalah frekuensi gelombang.

Untuk suatu fase tertentu dari gelombang, pola gelombang tersebut akan tetap selama nilai $kx - \omega t$ tetap. Sehingga dengan berjalannya waktu, nilai kz juga harus bertambah. Ini berarti pola gelombang akan merambat ke kanan dengan kecepatan yang diberikan oleh

$$\frac{k\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{9.37}$$

atau

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} \tag{9.38}$$

9.5 Superposisi Gelombang

Dua buah gelombang dapat dijumlahkan atau disuperposisikan. Ada beberapa kasus yang akan kita tinjau. Kasus dua gelombang dengan ω, k sama tetapi berbeda fasenya. Kasus dua gelombang dengan ω, k sama tetapi arah geraknya berlawanan. Kasus dua gelombang dengan ω dan $k$nya berbeda sedikit.

9.5.1 Beda fase

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(kz - \omega t + \phi_1) \tag{9.39}$$

$$x_2 = A\sin(kz - \omega t + \phi_2) \tag{9.40}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(kz - \omega t + \bar{\phi})\cos(\delta\phi) \tag{9.41}$$

dengan $\bar{\phi} = (\phi_1 + \phi_2)/2$ dan $\delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)/2$

9.5.2 Beda arah kecepatan

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(kz - \omega t) \tag{9.42}$$

$$x_2 = A\sin(kz + \omega t) \tag{9.43}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(kz)\cos(\omega t) \tag{9.44}$$

Fenomena ini sering disebut sebagai gelombang tegak

9.5.3 Beda frekeunsi dan panjang gelombang

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(k_1 z - \omega_1 t) \tag{9.45}$$

$$x_2 = A\sin(k_2 z - \omega_2 t) \tag{9.46}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(\bar{k}z - \bar{\omega}t + \bar{\phi})\cos(\delta kz - \delta\omega t) \tag{9.47}$$

dengan $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$, $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ dan $\delta k = (k_1 - k_2)/2$, $\delta\omega = (\phi_1 - \phi_2)/2$

Ketika bedanya sangat kecil maka muncul fenomena yang disebut sebagai layangan.